历年考试题目汇总

Seal @ sealzhang.tk

2015年12月12日

1 2013-2014年第一学期期末考试

1. 简答题

   （1）简要说明量子力学的态叠加原理；

   （2）简要说明量子力学的不确定关系；

   （3）简要说明量子力学中物理量的期待值的概念；

   （4）写出坐标空间的薛定谔方程；

   （5）空间平移不变性、空间旋转不变性和空间反演不变性分别导致哪些守恒量；

   （6）假设氢原子处在$|nlm\rangle = |320\rangle$的状态，氢原子通过发射光子衰变到低能状态，已知基态氢原子基态能量为E_0，请给出在电偶极近似下发射光子的可能能量。

2. 一个不带电荷的自旋为1/2的粒子处在沿x轴正方向的均匀磁场中，磁场强度为B_0。粒子的自旋磁矩可以写为$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{2\mu_0}{\hbar}\hat{\boldsymbol{S}}$，其中$\mu_0$为常数，$\hat{\boldsymbol{S}}$是粒子的自旋算符。

   （1）在$(\hat{\boldsymbol{S}}, \hat{S}_z)$表象下写出系统的哈密顿量，并求出系统的本征值和本征矢量；

   （2）如果在$t=0$时刻粒子处在$\hat{S}_z$的一个本征态，本征值为$\hbar/2$，求任意时刻$\hat{S}_z$的期待值。

3. 一个三能级系统的哈密顿量在一组基矢$\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$下的表示为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & (a+b)/2 \\ 0 & b & (a+b)/2 \\ (a+b)/2 & (a+b)/2 & 0 \end{pmatrix}$$

   其中，$a \ll 1$，$b \ll 1$，并且$a \neq b$，可以将$\hat{V}$看做微扰。

   （1）利用微扰理论计算所有能级至一级近似；

   （2）利用微扰理论计算基态波函数至一级近似。

4. 一个质量为m，电荷为q的粒子，束缚在如下的二维势阱中

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & 0\le x\le a, 0\le y\le a\\ 0, & \texttt{otherwise}\end{cases}$$

如果在0到τ的时间内引入一个弱电场$E=E_0e_x+E_0e_y$，e_x和e_y分别为x和y方向的单位矢量，该粒子能在不同能级间发生跃迁。
（1）求跃迁的选择定则。
（2）如果$t=0$时，粒子处于基态，利用一阶微扰近似计算在$t>\tau$时，粒子处在第一激发态的概率。（设$\omega_0=\dfrac{\pi^2\hbar}{2ma^2}$）【设$\omega_0=\frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}$】

5. 两个自旋为1/2，质量为m的全同粒子处在一个以为谐振子势阱中，势阱的哈密顿量为
$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$
（1）请写出系统的基态和第一激发态的能量，并给出简并度。
（2）如果势阱中存在一个微扰$\hat{H}'=-\alpha\hat{x}$，其中$|\alpha|\ll\hbar\omega^3m$。利用微扰理论求基态能量至二级近似。
【提示：梯子算符的定义为$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(i\hat{p}+m\omega\hat{x})$】

2 2013-2014年第一学期期中考试

1. 计算如下势能中的束缚态

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\\ 0, & 0\le x\le a\\ V_0, & x>a\end{cases}$$

（1）写出决定其束缚态能级的表达式。
（2）如果它只有一个束缚态，求该势能满足的条件。

2. 已知一维谐振子系统处于其基态

$$\psi(x)=(\beta/\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}exp(-\frac{1}{2}\beta^2x^2)$$

其中，$\beta=\sqrt{m\hbar/\omega}$ 。
（1）求势能的平均值；
（2）求动能的测量值分布。

3. （1） 计算$[\hat{x},\hat{L_x}]$，$[\hat{x},\hat{L_y}]$，$[\hat{x},\hat{L_z}]$

（2）证明$[\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{L}^2}]=-2i\hbar\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{L}}-2\hbar^2\hat{\boldsymbol{r}}$

其中，$\hat{\boldsymbol{r}}=\hat{x}\boldsymbol{e_x}+\hat{y}\boldsymbol{e_y}+\hat{z}\boldsymbol{e_z}$，$\hat{\boldsymbol{L}}=\hat{L_x}\boldsymbol{e_x}+\hat{L_y}\boldsymbol{e_y}+\hat{L_z}\boldsymbol{e_z}$

4. 已知系统处于如下波函数

$$\psi=A(Y_0^0+Y_1^0)$$

（1）求$\langle\hat{\boldsymbol{L}^2}\rangle$，$\langle\hat{L_z}\rangle$；

（2）求$\hat{L_x}$的测量可能值和相应的概率。

3 2013-2014年第一学期期末考试

1. 简答题 【missing】

2. 粒子的哈密顿量$\hat{H}_0$在某表象中的矩阵表示为$\hat{H}_0=a\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$(a>0)$

（1）求解$\hat{H}_0$的本征值和本征矢；

（2）假定现在加上一微扰作用$\hat{H}'=\epsilon\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$(0<\epsilon\ll a)$，用微扰方法求出基态能量（准确到二级近似）和波函数（准确到一级近似）。

3. 有一质量为m、自旋为1/2的电子在磁场$\boldsymbol{B}=(\frac{B_0}{\sqrt{2}},0,\frac{B_0}{\sqrt{2}}$中运动，哈密顿量为$\hat{H}=-g_s\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{B}$，选定力学量完全集$(\hat{S}^2,\hat{S}_z)$。

（1）写出$\hat{H}$的矩阵表示，并且求出$\hat{H}$的本征值和本征矢量；

（2）如果初始$t=0$时刻，该电子自旋朝下，求能量的测量可能值和对应的几率；

（3）计算任意t时刻的波函数，并任意t时刻的$\langle\hat{S_x}\rangle$。

4. 两个质量为m、自旋为1/2的全同粒子被限制在x方向做一维运动。假定两粒子之间的相互作用与自旋无关，而且只与它们的距离有关，形式为

$$V(x)=\begin{cases}0 & |x|\le a/2\\ \infty & |x|>a/2\end{cases}$$

其中$x=x_1-x_2$，x_1和x_2分别是两个粒子的位置。【提示：只需考虑两粒子的相对运动】

（1） 求系统的基态能量和基态波函数；

（2）如果加上一沿x方向的磁场，自旋在此磁场下受到的作用为$\hat{H}_m=-\lambda(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，其中$\sigma$是Pauli矩阵，$\lambda=\dfrac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$。求此时系统的基态能量和基态波函数。

5. 考虑一个自旋为1/2的电子，假定轨道角动量为L，状态波函数可以写为$|\psi\rangle = f_1(\theta,\varphi)|\uparrow\rangle + f_2(\theta,\varphi)|\downarrow\rangle$，即

$$|\psi\rangle = R\begin{pmatrix} Y_{00}(\theta,\varphi)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}(\theta,\varphi) \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}(\theta,\varphi)-\dfrac{1}{2}Y_{11}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}$$

其中θ和φ是粒子的球坐标，R是一常数，$Y_{lm}(\theta,\varphi)$是$(\hat{L^2},\hat{L_x})$的共同本征函数。

（1）由归一化条件确定R；

（2）求在态$|\psi\rangle$下分别测量S_z和S_x，求各自的测量值和几率；

（3）求同样情况下测量L_x的测量值和几率；

（4）如果对L^2进行测量得到的结果是0，求测量后的波函数。

4 2011-2012年第一学期期末考试

1. （1）简要说明波函数的物理意义；

（2）简要说明全同多粒子体系波函数的交换对称性；

（3）写出分立谱和连续谱的正交归一性和完备性关系式；

（4）计算$\hat{p_x}e^{2x}-e^{2x}\hat{p_x}$，其中$\hat{p_x}$是$x$方向的动量算符。

2. 质量为m的粒子在势场$V(x)=-a\delta(x)+V'(x)$中运动，

$$V' = \begin{cases} 0 & x<0 \\ V_0 & x>0 \end{cases}$$

其中，$a>0$，$V_0>0$。

（1）试给出存在束缚态的条件，并给出其能量本征值和相应的本征函数；

（2）求出粒子处在$x>0$区域的几率。这个几率是大于1/2，还是小于1/2，为什么？

3. 一个质量为m的粒子在以为谐振子势$V(x)=\frac{1}{2}kx^2$中运动，其中$k=m\omega^2$是谐振子势的强度，ω为谐振子的本征振动频率。如果$t=0$时刻波函数为$\psi(x,0)=3\psi_0(x)+4i\psi_1(x)$，其中$\psi_0$和$\psi_1$分别是以为谐振子的基态和第一激发态的归一化能量本征波函数。

（1） 求$t=0$时刻测量能量的可能值和相应的几率；

（2）求任意t时刻测量粒子能量的平均值；

（3）如果某时刻τ，谐振子势强度k突变为$4k$，求粒子处于新的谐振子势中基态的几率。

【附注1：常用积分公式$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$】

【附注2：一维谐振子的归一化波函数$\psi_n(x) = (\frac{\alpha}{\sqrt{\pi 2^n n!}})^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_n(\alpha x)$，其中$H_n$是厄米多项式，$H_0(\alpha x) = 1$，$H_1(\alpha x) = 2\alpha x$】

4. 粒子的哈密顿量$\hat{H}_0$在某表象中的矩阵表示为$\hat{H}_0 = a\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$(a > 0)$

（1） 求解$\hat{H}_0$的本征值和本征矢；

（2）假定现加上一微扰作用$\hat{H}' = \epsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$(0 < \epsilon \ll a)$， 用微扰方法求出基态的二级能量近似和一级波函数近似。

5. 已知电子的二分量形式的态函数为

$$\psi(\boldsymbol{r}, S_z) = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = R(\boldsymbol{r})\begin{pmatrix} \sqrt{3/5}Y_{00} + \sqrt{1/10}Y_{11} + \sqrt{1/10}Y_{1-1} \\ \sqrt{1/5}Y_{10} \end{pmatrix}$$

其中$R(\boldsymbol{r})$已归一化，求

（1） 同时测量L^2为$2\hbar^2$，L_z为$\hbar$的几率；

（2）电子自旋朝上的几率；

（3）$\hat{L}_z$和$\hat{S}_z$的平均值。