重视：

1） 重视课堂内容
2） 课后看书、看课件，把概念和知识点理解清楚；
3） 独立推导一些基本的公式，独立完成作业；
4） 阅读参考书和文献，掌握一些与教材内容密切相关的课外知识；
5） 鼓励围绕课堂学习内容所撰写的问题讨论。

第一章 数学准备：矢量分析与张量初步

本章将对电动力学中所要用到的矢量分析和张量分析作一个简单介绍，给出常用的公式，为电动力学的学习做好数学准备。

§1.1 矢量代数

1、在**三维欧氏空间**，我们可以**一般地定义 n 阶张量**如下：

0 阶张量，即所谓的标量，只有一个分量，或者说只有大小，没有方向。通常用 φ, ϕ 表示。

1 阶张量，即所谓的矢量，有三个分量，或者说，既有大小、又有方向。通常用 $\vec{A}$ 表示。

2 阶张量：具有 $3^2=9$ 个分量的量。通常用 $\overleftrightarrow{T}$ 表示。

n 阶张量：具有 3^n 个分量的量。

物理学的研究中会遇到各种不同类型的量，如速度，温度，力等等。按其性质，可以将这些量分为标量、矢量、张量等。

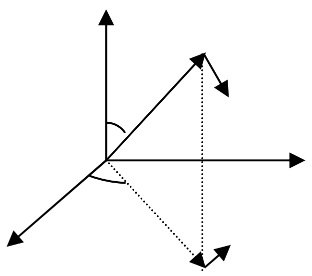
在本课程最后所讨论的相对论部分：我们会把前六章的结论归纳到四维空间进行分析，因此我们将定义相应的零阶张量（即四维空间的标量）、一阶张量（即四位矢量，四个分量）、和二阶张量（16 个分量）

2、矢量 $\vec{A}$ 可以有不同的表示：

$$\vec{A}=A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_z\vec{e}_z$$
$$=A_r\vec{e}_r+A_\theta\vec{e}_\theta+A_\varphi\vec{e}_\varphi$$
$$=A_\rho\vec{e}_\rho+A_\varphi\vec{e}_\varphi+A_z\vec{e}_z$$
$$=\sum_{i=1}^{3}A_i\vec{e}_i$$

简写成：$\vec{A}=A_i\vec{e}_i$（所谓爱因斯坦求和法则）

（1.1）



其中 $\vec{e}_i$ 为单位矢量。

注意：在 x, y, z 空间，基矢不依赖空间的位置，而在球坐标和柱坐标中则不同！)

3、两个矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 之间可以定义标积和矢积：

标积：$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\alpha.$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=A_iB_i.$$

$$=\delta_{ij}A_iB_j \qquad (1.2)$$

其中：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & (i\neq j)\\ 1, & (i=j)\end{cases}$$

矢积：

$\vec{A}\times\vec{B}=$

$\vec{e}_x(A_yB_z-A_zB_y)+\vec{e}_y(A_zB_x-A_xB_z)+\vec{e}_z(A_xB_y-A_yB_x)$

也可以写成分量形式：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\varepsilon_{ijk}\vec{e}_iA_jB_k \qquad (1.4)$$

其中：

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0, & (i=j,\ or, j=k,\ or\ i=k)\\ +1 & (i,j,k \text{ circulate in the order of 1,2, and 3})\\ -1 & (\text{otherwise})\end{cases} \qquad (1.5)$$

δ_{ij} 和 ε_{ijk} 算符之间还有一个重要的关系式：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km} \qquad (1.6)$$

思考：如何去证明上述关系。

三个矢量的矢积：

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}. \quad ! \qquad (1.7)$$

记住方法：

✓ 这个矢量一定落在 $(\vec{B},\vec{C})$ 组成的平面内，所以必然可以用它

们来分解；

✓ 当最后运算的矢量位于最前位置时，括号中位于前面的系数取正号，在后面的取负号。

矢量的混合积满足

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} \quad ! \qquad (1.8)$$

这是由矢量 $\vec{A}$ 、$\vec{B}$ 、$\vec{C}$ 构成的斜立方体的“体积”。

记住方法：

✓ 这个混合积是一个标量，因此只可能是两个矢量的叉积与一个矢量的标积；

✓ 当最后运算的矢量位于最前位置时，只要保持循环顺序，并且叉与点积的位置不变。

$$(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}.$$

§ 1.2 矢量分析

矢量场或标量场：如果一个矢量 $\vec{A}$ 或者标量 φ 是空间位置矢量 $\vec{x}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z$ 的函数， 则称之 $\vec{A}(\vec{x})$ 为矢量场或 $\varphi(\vec{x})$ 标量场。

对这些场量进行微分、积分运算就称为矢量分析。

常见的运算：梯度、散度、旋度，以及各种微分、积分运算。

1、定义：矢量微分算符 ∇，

$$\nabla=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

算符 ∇ 是个特殊的矢量，是矢量算符，或者算符矢量。

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}=\delta_{ij}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}\Leftarrow\left(\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right).\left(\vec{e}_jA_j\right)\Leftarrow\delta_{ij}\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \qquad (1.9)$$

$$\vec{A}\cdot\nabla\Rightarrow\left(\vec{e}_jA_j\right)\cdot\left(\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\delta_{ij}A_j\frac{\partial}{\partial x_i}=A_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

常用运算之一： $\vec{A}=\vec{A}_0\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$，（$\vec{A}_0,\vec{k}$ 与位置矢量 $\vec{x}$ 无关）

$$\nabla\cdot\vec{A}=i\vec{k}\cdot\vec{A}$$

2、标量的梯度定义为：

$$\nabla\varphi(\vec{x})=\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi. \qquad (1.10)$$

梯度方向：曲面 $\varphi(\vec{x})=$常数的法线方向。

如 $\varphi(\vec{x})=R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi(\vec{x})=\frac{1}{R}$ 的梯度是沿着径向，前者的方向是向无穷远，而后者则是指向原点。

标量场沿着 $d\vec{x}$ 方向的增量可写成：

$$d\varphi=\nabla\varphi\cdot d\vec{x}. \qquad (1.11)$$

常用公式之一：

$$\nabla\cdot\left(\varphi\vec{A}\right)=\left(\nabla\varphi\right)\cdot\vec{A}+\varphi\nabla\cdot\vec{A} \qquad (1.12)$$

3、矢量 $\vec{A}$ 的散度定义为：

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{x})=\lim_{V\to0}\frac{1}{V}\oint_S\vec{A}\cdot d\vec{S} \qquad (1.13)$$

如果一个矢量场的散度处处为零，$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{x})=0$，这样的矢量场称为**无源场**。

例如我们很快要接触到的磁感应强度 $\vec{B}$，磁感应线由于始终是闭合的线，不管所选取的闭合面有多小，所以始终有 $\oint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=0$。

对于矢量 $\vec{A}$ 的散度，有如下的 Gauss 定理：

$$\int_V \mathrm{d}V\nabla\cdot\vec{A}(\vec{x})=\oint_S \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{A}(\vec{x}) \qquad ! \qquad (1.14)$$

即矢量 $\vec{A}$ 沿 V 的闭合边界面的面积分等于矢量 $\vec{A}$ 的散度对 V 的体积分。

注意：对于闭合面面，面元矢量的定义：大小为面元面积，方向垂直于面元、指向闭合面的外面。

换言之，“面积分”和“体积分”之间相互转换。

$$\to\int_V \mathrm{d}V\nabla\cdot=\oint_S \mathrm{d}\vec{s}\cdot \qquad (1.15)$$

——这是一个很重要的定理，应用很广，以后我们会经常用到。

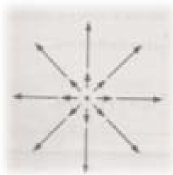
4、矢量 $\vec{A}$ 的旋度：

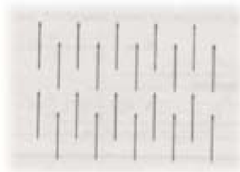
$$\nabla\times\vec{A}=\vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\vec{e}_z\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

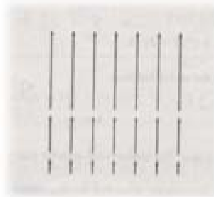
$$\nabla\times\vec{A}=\vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k \qquad (1.16)$$

若矢量场的旋度不为零，称为有旋场；旋度为零的称为无旋场。

以下为无旋场的几个简单例子：

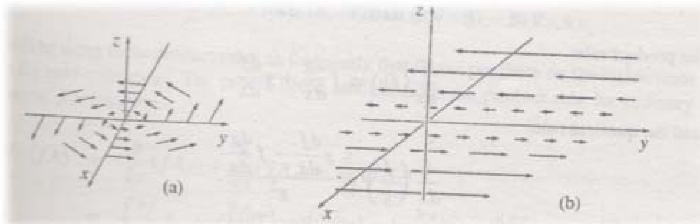






再如，三维空间的矢量 $\vec{A}=\vec{x}$ 也是无旋场。

以下为两个有旋场的例子：



常用运算：

$$\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

$$R = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\nabla R = \frac{\vec{x}}{R} = \vec{e}_R$$，球面上沿着矢径方向的梯度

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\vec{x}}{R^3}.$$

$$\nabla \times \vec{x} = 0$$

还有： $\vec{E}=\vec{E}_0 \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$（$\vec{E}_0, \vec{k}$ 与位置矢量 $\vec{x}$ 无关）

$$\nabla \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E}$$

易证明：任何标量场的梯度场都是无旋场：

$$\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv 0 \qquad ! \qquad (1.17)$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) == \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi\right) \equiv 0$$

即标量场的梯度为无旋场。

易证明：矢量场的旋度为无源场

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0. \qquad ! \qquad (1.18)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \left(\vec{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \cdot \left(\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k\right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \equiv 0$$

关于旋度，还有一个重要的公式（供参考）：

$$\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint_L d\vec{l} \cdot \vec{A}.$$

对于矢量 $\vec{A}$ 的旋度，我们有 Stokes 定理：

$$\int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \oint_L \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{A} \qquad (1.19)$$

即：矢量 $\vec{A}$ 的旋度的面（任意的面）积分，等于矢量 $\vec{A}$ 沿面 S 的边界线 L 的线积分（环量）。

注意：这里面法向或者面元方向 $\mathrm{d}\vec{S}$ 与线元绕向 $\mathrm{d}\vec{l}$ 成右手螺旋关系。

Gauss 定理和 Stokes 定理是矢量分析中的基本定理，必须熟练掌握。

前面定义的矢量微分算符 $\nabla = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ 是个特殊的量，既是矢量，又是算符。因此，在运算过程中，既要遵守微分的运算规则，也要遵守矢量的运算规则。

因为 ∇ 是线性算符，当 a, b 为常数时，有

$$\nabla(a\varphi + b\psi) = a\nabla\varphi + b\nabla\psi,$$

$$\nabla \cdot (a\vec{A} + b\vec{B}) = a\nabla \cdot \vec{A} + b\nabla \cdot \vec{B}$$，等等。

对于类似 $\nabla(\phi\psi)$，$\nabla \cdot (\phi\vec{A})$，$\nabla \times (\varphi\vec{A})$ 和 $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B})$ 这样的运

算，除考虑到 ∇ 是矢量，运算时要遵守矢量的规则外，还要考虑到 ∇ 是微分算符。

因此有

$$\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$$

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\nabla\varphi\cdot\vec{A}+\varphi\nabla\cdot\vec{A}\\&\nabla\times(\varphi\vec{A})=\nabla\varphi\times\vec{A}+\varphi\nabla\times\vec{A}\end{aligned}\qquad (1.19)$$

注意：第二个公式中的第一项不能写成 $\vec{A}\times\nabla\phi$。

另外要注意：∇ 的作用对象要明确，必要时应当加上括号。

可以证明：

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\\&=\underline{\nabla_A\cdot(\vec{A}\times\vec{B})+\nabla_B\cdot(\vec{A}\times\vec{B})}\\&=(\nabla_A\times\vec{A})\cdot\vec{B}-\nabla_B\cdot(\vec{B}\times\vec{A})\end{aligned}$$

最后得到：$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B}-(\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{A}.$ （1.20）

其中我们用 ∇_A 表示对矢量 $\vec{A}$ 的微分。

稍微复杂一点的公式有：$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=?$

简单套用前面引出的三个矢量矢积形式

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}.\qquad \textbf{!}$$

就会把上面的结果错误的写成如下的形式

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\nabla\cdot\vec{B})\vec{A}-(\nabla\cdot\vec{A})\vec{B}.\qquad \textbf{(X)}$$

$$\begin{aligned}&\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})\\&=\underline{\nabla_A\times(\vec{A}\times\vec{B})+\nabla_B\times(\vec{A}\times\vec{B})}\\&=(\nabla_A\cdot\vec{B})\vec{A}-(\nabla_A\cdot\vec{A})\vec{B}+(\nabla_B\cdot\vec{B})\vec{A}-(\nabla_B\cdot\vec{A})\vec{B}\\&=(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\nabla\cdot\vec{A})\vec{B}+(\nabla\cdot\vec{B})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}.\end{aligned}\qquad (1.21)$$

请特别的注意：上面的第一步的处理。由于这里出现了一个算符矢量，而且这个算符在这里是既作用在 A 上，又要作用在 B 上。

不难证明下面列出一些常用的公式：

$$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}$$

$$\begin{aligned}&\nabla\times(\nabla\times\vec{E})\\&\qquad=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-(\nabla\cdot\nabla)\vec{E},\\&\qquad=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E},\end{aligned}\qquad (1.22)$$

另一种证明方法：

$$\begin{aligned}&\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{x_j}\left[\varepsilon_{kmn}\frac{\partial}{x_m}E_n\right]\\&=\vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\frac{\partial}{x_j}\frac{\partial}{x_m}E_n=\vec{e}_i\varepsilon_{kij}\varepsilon_{kmn}\frac{\partial}{x_j}\frac{\partial}{x_m}E_n\\&=\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)\vec{e}_i\frac{\partial}{x_j}\frac{\partial}{x_m}E_n\\&=\vec{e}_i\frac{\partial}{x_i}\frac{\partial}{x_j}E_j-\vec{e}_i\frac{\partial}{x_j}\frac{\partial}{x_j}E_i\\&=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E},\end{aligned}$$

再有：

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})&=\underline{\vec{A}\times(\nabla_B\times\vec{B})}\\&=\nabla_B(\vec{B}\cdot\vec{A})-(\nabla_B\cdot\vec{A})\vec{B},\\&=\nabla_B(\vec{B}\cdot\vec{A})-(\vec{A}\cdot\nabla_B)\vec{B},\\&=\nabla_B(\vec{B}\cdot\vec{A})-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B},\end{aligned}$$

大家可以考虑

$$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{A})=?$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=?$$

习题 1 中有这个公式需要证明:

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}),\quad(1.26)$$

证明如下：

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})&=\vec{A}\times(\nabla_B\times\vec{B})\\&=\nabla_B\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)-\left(\vec{A}\cdot\nabla_B\right)\vec{B}\\&=\nabla_B\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})&=\vec{B}\times(\nabla_A\times\vec{A})\\&=\nabla_A\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{B}\cdot\nabla_A\right)\vec{A}\\&=\nabla_A\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})&=\underline{\nabla_A(\vec{A}\cdot\vec{B})+\nabla_B(\vec{A}\cdot\vec{B})}\\&=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}\end{aligned}$$

最后再补充一下：电动力学讨论问题，常常需要区分源点和场点。源点的位置矢量一般用$\vec{x}'$表示，而场点的位置矢量一般用$\vec{x}$表示。因此，我们可以定义两个算符：

$$\nabla=\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla'=\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i'}=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x'}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y'}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z'},$$

它们分别只对$\vec{x}$和$\vec{x}'$进行微分作用。

如果我们定义场点、源点之间的距离

$$r=\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|=\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2},$$

则有：

$$\begin{aligned}&\nabla r=-\nabla' r\\&\nabla\frac{1}{r}=-\nabla'\frac{1}{r}\\&\nabla\cdot\vec{r}=3,\\&\nabla r=\frac{\vec{r}}{r}=\vec{e}_r,\\&\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}.\\&\nabla\times\vec{r}=0\end{aligned}$$

思考题：源区 x’ 分布有随时间变化的电荷$\rho\left(\vec{x}',t'\right)$和电流$\vec{J}\left(\vec{x}',t'\right)$分布，则任意 t 时刻，场点 x 处的电磁势（标势、矢势）分别可以表示成

$$\phi\left(\vec{x},t\right)=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\rho\left(\vec{x}',t-\frac{r}{c}\right)\mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r}\vec{J}\left(\vec{x}\,',t-\frac{r}{c}\right)\mathrm{d}V\,'$$

试证明：$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$**——著名的 Lorenz 规范辅助条件。**

提示：

$$\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}\,',t')+\frac{\partial\rho(\vec{x}\,',t')}{\partial t'}=0$$

$$\nabla'\cdot\vec{J}\left(\vec{x}\,',t-\frac{r}{c}\right)=\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}\,',t')\Big|_{t'\,being fixed}+\frac{\partial\vec{J}(\vec{x}\,',t')}{\partial t'}\cdot\nabla't'$$

作业：

郭硕鸿《电动力学》（第三版）第一章习题 **1、2、3**