§5 格林函数法

1

几种方法的比较

1. **镜像法**只适用于比较简单（点电荷）问题；
2. **分离变量法**是精确求解的方法：除了几个高对称的边界问题以外，一些实际问题往往难以求解；
3. 多极展开法只适用于求远处的场（最后一节）；
4. 格林函数方法

2

格林函数方法:

- Green函数本身实际上是对应于给定问题所对应的单位点源的电势解;
- 原问题的解可以通过这个点源的解表示出来;通过格林公式,把静电边值问题与相应的格林函数问题联系起来。
- 一般的处理方法,在物理学领域有着非常广泛的应用

3

本节主要内容:

1. 格林函数——对应于给定问题的单位点源的电势解;
2. 格林函数与泊松方程的解之间的关系;
3. 几种简单边界问题的格林函数形式。

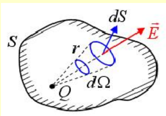
4

几个基本公式：$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$,

高斯定理：$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i$

空间一个单位点电荷的电场：$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$

若点电荷处于闭合积分面内：



$$\oiint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}, \quad \boxed{\oiint \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi}$$

若点电荷处于闭合积分面外：

$$\oiint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0, \quad \boxed{\oiint \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

5

1、点电荷的电势和所满足的泊松方程

6

1）处于原点处的、单位点电荷的密度分布可
用 Delta函数表示：

$$\delta(\vec{x})\begin{cases}\delta(\vec{x})=0, & \text{当}x\neq 0;\\ \int_V \delta(\vec{x})\mathrm{d}V=1, & \text{积分区域包含}\ \vec{x}=0\end{cases}$$

7

2）$\delta(\vec{x})$ 函数的性质：

① 在 x = 0 处为无穷大，因此它不是通常意义下的函数；

② 可以看成某种连续函数的极限；

③ 其它性质：

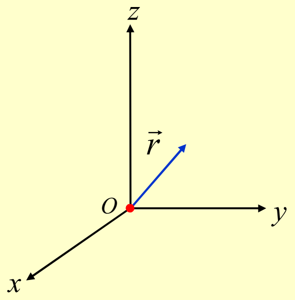
$$\int_V f(\vec{x})\ \delta(\vec{x})\ \mathrm{d}V=f(0)\int_V \delta(\vec{x})\mathrm{d}V=f(0)$$

$$\boxed{\int_V f(\vec{x})\delta(\vec{x}-\vec{x}')\mathrm{d}V=f(\vec{x}')}$$

8

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

3）先来看这样的一个问题：在一个无界空间，处于原点处的单位点电荷所激发电场的电势满足相应的泊松方程



$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

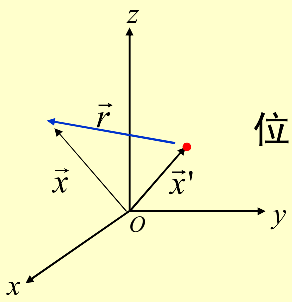
$$\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$$

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

9

4）在一般情况下，如果源点在 $\vec{x}'$ 处，则有

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$



位于 x’ 处的单位点电荷，电荷密度

$$\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

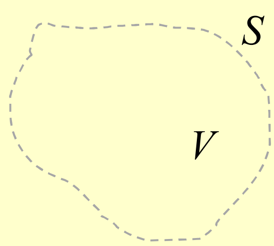
$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

10

2、格林函数

[两类边值问题的格林函数 $G(\vec{x},\vec{x}')$]

静电边值问题的分类：



① 第一类边值问题：

V 内给定 $\rho_f(\vec{x})$

V 的外边界上给定电势 $\varphi|_S$

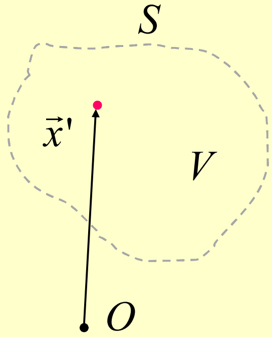
② 第二类边值问题：

V 内给定 $\rho_f(\vec{x})$

V 的外边界上给定电势的法向导数 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$

假设：在求解区域 V 内，存在**一个单位自由点电荷**，则区域内的电势满足如下形式的泊松方程

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}\,') \qquad \text{——（5.5）}$$

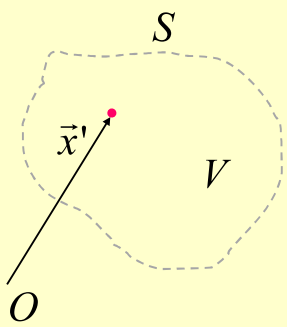


$$\nabla^2\varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}\,') \qquad \text{——（5.5）}$$

A）第一类边值问题的格林函数：

如果在 V 的边界 S 上，电势满足如下的边界条件：

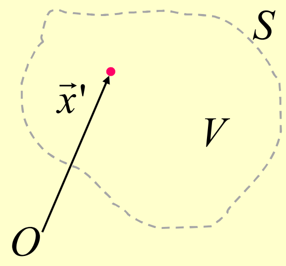
$$\varphi|_S = 0, \qquad \text{——（5.6）}$$



把满足方程（5.5）和边界条件（5.6）的**解**称为泊松方程在区域V的**第一类边值问题的格林函数**。

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}\,') \quad \text{——（5.5）}$$

B）第二类边值问题的格林函数：



如果在 V 的边界 S 上，电势满足如下的边界条件：

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{S\varepsilon_0}, \quad \text{——（5.7）}$$

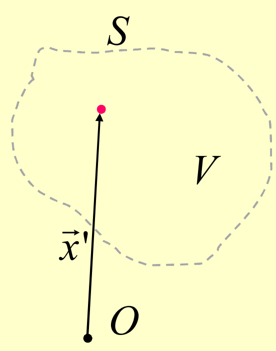
把满足方程（5.5）和边界条件（5.7）的**解**称为泊松方程在区域V的第二类边值问题的格林函数。

15

$$\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')$$

$\vec{x}$ 为场点的位置矢径；$\vec{x}\,'$ 为源点的位置矢径

方程中的算符是对 $\vec{x}$ 的微分算符



16

3、格林函数与泊松方程的解之间的关系

1）格林定理

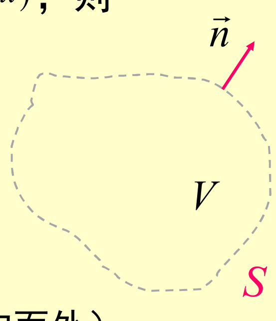
2）格林函数与泊松方程的解之间的关系

1）格林定理：

设区域V 内有两个函数 $\psi(\vec{x})$和$\varphi(\vec{x})$，则

$$\int_V \left(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi\right)\ \mathrm{d}V$$

$$= \oint_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\ \mathrm{d}S$$



式中 $\vec{n}$ 为界面的法线矢量（指向面外）。

证明：

利用关系式：

$$\nabla\cdot\left(\psi\nabla\varphi\right)=\nabla\psi\cdot\nabla\varphi+\psi\nabla^2\varphi$$

$$\nabla\cdot\left(\varphi\nabla\psi\right)=\nabla\psi\cdot\nabla\varphi+\varphi\nabla^2\psi$$

两式相减得

$$\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi=\nabla\cdot\left(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi\right)$$

19

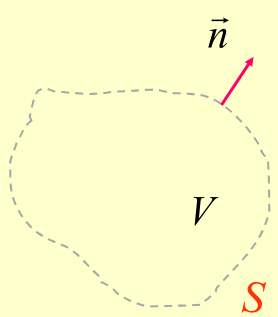
$$\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi=\nabla\cdot\left(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi\right)$$

$$\int_V\left(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi\right)\,\mathrm{d}V$$

$$=\int_V\nabla\cdot\left(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi\right)\,\mathrm{d}V$$

$$=\oint_S\left(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

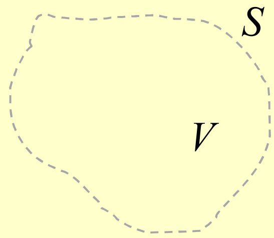
$$=\oint_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$



格林定理对任意函数 $\psi(\vec{x})$ 和 $\varphi(\vec{x})$都成立。

20

静电边值问题的分类：



① 第一类边值问题：

V 内给定 $\rho_f(\vec{x})$

V 的外边界上给定电势 $\varphi|_S$

② 第二类边值问题：

V 内给定 $\rho_f(\vec{x})$

V 的外边界上给定电势的法向导数 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$

21

格林函数方法求解边值问题的思路：

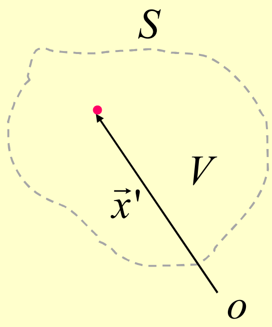
① 用格林定理将一般边值问题的解同格林函数联系起来；

② 根据格林定理，若能求出相应问题的格林函数，则实际的边值问题原则上就得到解决。

22

格林函数 $G(\vec{x},\vec{x}')$ 是在 $\vec{x}'$ 处单位点电荷所激发的、满足如下边界条件的电势

$$\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$



$$G(\vec{x},\vec{x}')\big|_S = 0$$

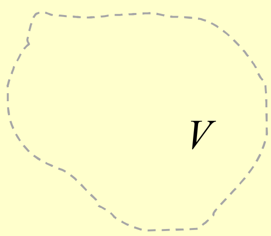
或者 $$\left.\frac{\partial G(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{S\varepsilon_0}$$

23

$$\int_V \left(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi\right)\,\mathrm{d}V = \oint_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\,\mathrm{d}S$$

取函数 $\varphi(\vec{x})$ 满足泊松方程：

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_f(\vec{x})$$



$\psi(\vec{x})$ 取为格林函数 $G(\vec{x},\vec{x}')$，满足方程

$$\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

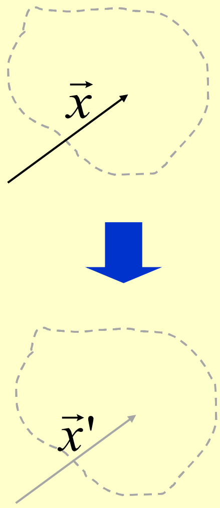
24

为后面讨论方便起见，做变换 $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$

这样的变换是不是有点多此一举了？毕竟，这样还需要把格林公式变换一下

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_f(\vec{x})$$

$$\nabla'^2 \varphi(\vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_f(\vec{x}')$$



$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

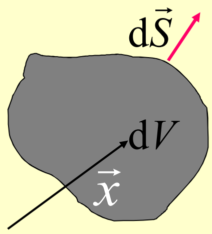
$$\nabla'^2 G(\vec{x}', \vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}' - \vec{x})$$

25

$$\int_V \left(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi\right)\, \mathrm{d}V = \oint_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\, \mathrm{d}S$$

$$\int_V \left[\psi(\vec{x})\nabla^2\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x})\nabla^2\psi(\vec{x})\right]\, \mathrm{d}V$$

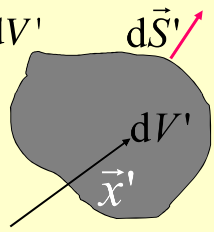
$$= \oint_S \left(\psi(\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial n} - \varphi(\vec{x})\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial n}\right)\, \mathrm{d}S$$



$\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$

$$\int_V \left[\psi(\vec{x}')\nabla'^2\varphi(\vec{x}') - \varphi(\vec{x}')\nabla'^2\psi(\vec{x}')\right]\, \mathrm{d}V'$$

$$= \oint_S \left(\psi(\vec{x}')\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}')\frac{\partial\psi(\vec{x}')}{\partial n'}\right)\, \mathrm{d}S'$$



26

$$\int_V \left[\psi(\vec{x}')\nabla'^2\varphi(\vec{x}') - \varphi(\vec{x}')\nabla'^2\psi(\vec{x}')\right]\ \mathrm{d}V' = \oint_S \left(\psi(\vec{x}')\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}')\frac{\partial\psi(\vec{x}')}{\partial n'}\right)\ \mathrm{d}S'$$

$$\psi(\vec{x}') \Longrightarrow G(\vec{x}',\vec{x})$$

$$\Longrightarrow \int_V \left[G(\vec{x}',\vec{x})\nabla'^2\varphi(\vec{x}') - \varphi(\vec{x}')\nabla'^2 G(\vec{x}',\vec{x})\right]\mathrm{d}V' = \oint_S \left(G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\right)\mathrm{d}S'$$

27

$$\nabla'^2\varphi(\vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_f(\vec{x}')$$

$$\int_V \left[G(\vec{x}',\vec{x})\nabla'^2\varphi(\vec{x}') - \varphi(\vec{x}')\nabla'^2 G(\vec{x}',\vec{x})\right]\ \mathrm{d}V' = \oint_S \left(G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\right)\ \mathrm{d}S'$$

等式左边第一项

$$\int_V G(\vec{x}',\vec{x})\nabla'^2\varphi(\vec{x}')\ \mathrm{d}V' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho_f(\vec{x}')\ \mathrm{d}V'$$

28

$$\nabla'^2 G(\vec{x}',\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}'-\vec{x}$$

$$\int_V \left[G(\vec{x}',\vec{x})\nabla'^2\varphi(\vec{x}') - \varphi(\vec{x}')\nabla'^2 G(\vec{x}',\vec{x}) \right] \mathrm{d}V'$$

$$= \oint_S \left(G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x}) \right) \mathrm{d}S'$$

等式左边第二项：$-\int_V \varphi(\vec{x}')\nabla'^2 G(\vec{x}',\vec{x})\ \mathrm{d}V'$

$$= -\int_V \varphi(\vec{x}')\frac{-\delta(\vec{x}'-\vec{x})}{\varepsilon_0}\ \mathrm{d}V'$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\varphi(\vec{x})$$

29

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}')\ \mathrm{d}V' + \frac{1}{\varepsilon_0}\varphi(\vec{x})$$

$$= \oint_S \left(G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x}) \right) \mathrm{d}S'$$

或者

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}')\ \mathrm{d}V'$$

$$+\varepsilon_0 \oint_S \left(G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x}) \right) \mathrm{d}S'$$

30

2）格林函数与泊松方程的解之间的关系

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}')\ \mathrm{d}V' + \varepsilon_0 \oint_S \left(G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x}) \right)\ \mathrm{d}S'$$

未知　已知

第一类静电边值问题：

在区域 V' 的边界面 S' 上 $\varphi|_{S'}$ 给定，即等式右边的 $\varphi(\vec{x}')$ 已知。

对于这类边值问题，如果能解决满足如下边界条件的格林函数

$$\boxed{G(\vec{x}',\vec{x})\big|_{S'} = 0}$$

$$\varphi(\vec{x})=\int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}')\ \mathrm{d}V'$$
$$+\varepsilon_0\oint_S\left(G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'}-\varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\right)\ \mathrm{d}S'$$

也就是说：若能求解格林函数边值问题：

$$\boxed{\nabla'^2 G(\vec{x}',\vec{x})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}'-\vec{x})}$$

$$\boxed{G(\vec{x}',\vec{x})\big|_{S'}=0}$$

$$\varphi(\vec{x})=\int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}')\ \mathrm{d}V'-\varepsilon_0\oint_S\varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\ \mathrm{d}S'$$

若求解区域内无自由电荷： $\Rightarrow$ $\varphi(\vec{x})=-\varepsilon_0\oint_S\varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\ \mathrm{d}S'$

33

$$\varphi(\vec{x})=\int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}')\ \mathrm{d}V'$$
$$+\varepsilon_0\oint_S\left(G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'}-\varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\right)\ \mathrm{d}$$

第二类静电边值问题：

在区域 V 的边界面 S' 上 $\partial\varphi(\vec{x}')/\partial n'\big|_{S'}$ 给定。

能否求解格林函数、并使之满足边界条件：

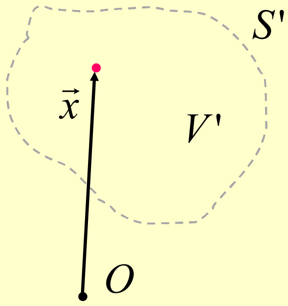
$$\left.\frac{\partial G(\vec{x}',\vec{x})}{\partial n'}\right|_S=0\quad\times$$

34

格林函数 $G(\vec{x}',\vec{x})$的物理意义是在 $\vec{x}$处存在一个单位电荷, 并满足一定边界条件的电势。

根据高斯定理,

$$-\oint \frac{\partial G(\vec{x}',\vec{x})}{\partial n'}\,\mathrm{d}S' = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

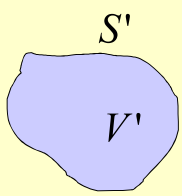


35

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}')\ \mathrm{d}V'$$
$$+\varepsilon_0\oint_S \left(G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x}) \right)\ \mathrm{d}S'$$

对于二类问题，最简单的边界条件选取：

$$\boxed{\left.\frac{\partial G(\vec{x}',\vec{x})}{\partial n'}\right|_S = -\frac{1}{S\varepsilon_0}}$$



$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho_f(\vec{x}')\ \mathrm{d}V'$$
$$+\varepsilon_0\oint_S G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x}')}{\partial n'}\mathrm{d}S + \frac{1}{S}\oint_S \varphi(\vec{x}')\ \mathrm{d}S'$$

36

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho_f(\vec{x}')\ \mathrm{d}V' + \varepsilon_0 \oint_S G(\vec{x}',\vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} \mathrm{d}S + \frac{1}{S}\oint_S \varphi(\vec{x}')\ \mathrm{d}S'$$

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho_f(\vec{x}')\ \mathrm{d}V' + \varepsilon_0 \oint_S G(\vec{x}',\vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} \mathrm{d}S + \langle \varphi \rangle_S$$

37

格林函数方法总结

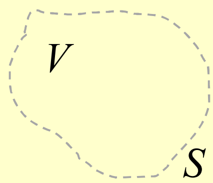
静电边值问题转化到求解相应的格林函数问题

38

第一类边值问题：

V 内给定 $\rho_f(\vec{x})$

V 的外边界上给定电势 $\varphi|_S$



如果满足如下边界条件格林函数能够求得

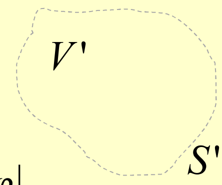
$$\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}'), \qquad G(\vec{x},\vec{x}')\big|_S = 0$$

则一类问题电势的解形式简化为

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho_f(\vec{x}')\ \mathrm{d}V' - \varepsilon_0 \oint_S \varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\ \mathrm{d}S'$$

39

第二类边值问题：



V 内给定 $\rho_f(\vec{x})$

V 的外边界上给定电势的法向导数 $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S$

如果满足如下边界条件格林函数能够求得

$$\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}'), \qquad \left.\frac{\partial G(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{S\varepsilon_0}$$

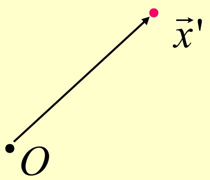
则二类问题电势的解形式简化为

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho_f(\vec{x}')\ \mathrm{d}V' + \varepsilon_0 \oint_S G(\vec{x}',\vec{x})\frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'}\mathrm{d}S + \langle \varphi \rangle_S$$

40

4. 几种区域的格林函数形式：

1） 无界空间的第一类（边值问题）格林函数
2） 半空间的第一类格林函数
3） 球外空间的第一类格林函数

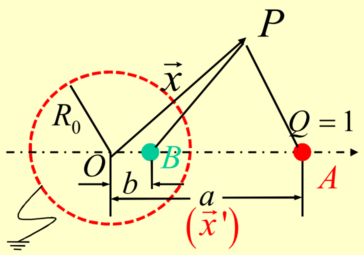


1）无界空间的第一类格林函数

- 求解问题的空间是无界空间，无穷远处的边界面上的电势为零；
- 此问题的相应格林函数即为在一个无界的空间，单位点电荷所激发电场的电势：

$$G(\vec{x}-\vec{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

2）球外空间的第一类格林函数：在接地导体球外的**单位点电荷产生的电势**



$$G(\vec{x}-\vec{x}\,')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{R_0}{x'}\right)\frac{1}{\left|\vec{x}-\frac{R_0^2}{x'^2}\vec{x}\,'\right|}$$

$$Q'=-\frac{R_0}{a}Q,$$

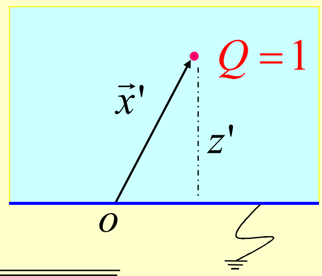
$$b=\frac{R_0^2}{a},\quad \vec{b}=\frac{R_0^2}{x'^2}\vec{x}\,',$$

$$PA=|\vec{x}-\vec{x}\,'|,$$

$$PB=\left|\vec{x}-\frac{R_0^2}{x'^2}\vec{x}\,'\right|$$

3）**半空间**（第一类边值问题）的格林函数

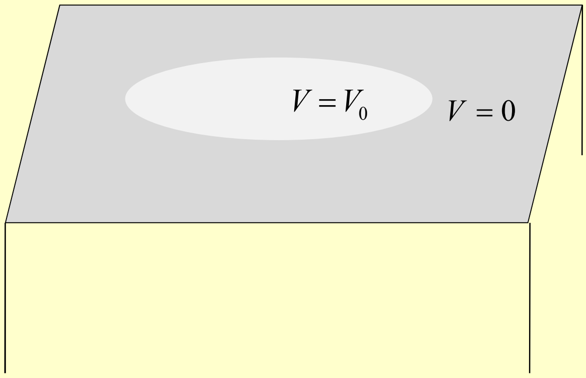
在无穷大接地导体平板外放置**单位点电荷**，**半空间的电势**就是半空间的格林函数。



$$G(\vec{x}-\vec{x}\,')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}$$

上述电势满足：$G(\vec{x},\vec{x}\,')\big|_{S(\text{导体表面及上半空间的 无穷远})}=0$

例题：在无穷大导体平面上有半径为 a 的圆，圆内和圆外有一极狭窄的圆形缝隙。设圆内的电势为 V_0，导体板其余部分的电势为 0。求上半空间的电势。

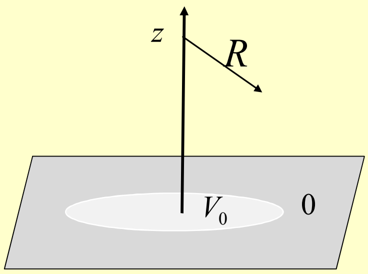


45

解：建立如图所示的柱坐标系，对应于空间位矢x和x’的柱坐标分别表示为

$$\vec{x}:\left(R\cos\varphi,R\sin\varphi,z\right)$$

$$\vec{x}':\left(R'\cos\varphi',R'\sin\varphi',z'\right)$$



对于本边值问题，边界上的电势给定，属于第一类边值问题；

在柱坐标系中上半空间的第一类格林函数为：

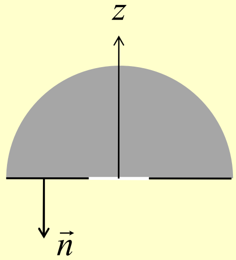
$$G\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\left(\varphi-\varphi'\right)+\left(z-z'\right)^2}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\left(\varphi-\varphi'\right)+\left(z+z'\right)^2}}$$

46

$$\varphi(\vec{x})=\int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}')\ \mathrm{d}V'-\varepsilon_0\oint_S \varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\ \mathrm{d}S'$$

在求解区域内的电荷密度为0，因此

$$\varphi(\vec{x})=-\varepsilon_0\oint_S \varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\ \mathrm{d}S'$$



上述积分面在无限远处的球面上为0, 余下的是在z=0的无限大的平面。

$$\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\Big|_{z=0}=-\frac{\partial}{\partial z'}G(\vec{x}',\vec{x})\Big|_{z=0}$$

$$=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos(\phi-\phi')+(z-z')^2}}\Bigg|_{z'=0}$$

$$\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z'}\frac{-1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos(\phi-\phi')+(z+z')^2}}\Bigg|_{z'=0}$$

47

$$\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\Big|_{z'=0}=\frac{-1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left[R^2+z^2+R'^2-2RR'\cos(\phi-\phi')\right]^{3/2}}$$

$$\varphi(\vec{x})=-\varepsilon_0\int_{z'=0}\varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\mathrm{dS}'$$

$$=-\varepsilon_0\int_{r\le a}\varphi(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}',\vec{x})\ \mathrm{dS}'$$

$$=\frac{V}{2\pi}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{z}{\left[R^2+z^2+R'^2-2RR'\cos(\phi-\phi')\right]^{3/2}}R'\mathrm{d}R'\mathrm{d}\phi'$$

$$=\frac{V}{2\pi}\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_0^a R'\mathrm{d}R'\int_0^{2\pi}\left[1+\frac{R'^2-2RR'\cos(\phi-\phi')}{R^2+z^2}\right]^{-3/2}\mathrm{d}\phi'$$

48