上次课主要内容

✓ 格林函数方法：静电边值问题转化到求解相应的格林函数问题；

✓ 第一类边值问题：

V 内给定 $\rho(\vec{x})$ 及 V 的外边界上给定电势 $\varphi|_S$；

若满足如下边界条件格林函数能够求得

$$\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')$$

$$G(\vec{x},\vec{x}\,')\big|_S = 0$$

则第一类问题电势的解形式简化为

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}\,',\vec{x})\rho(\vec{x}\,')\,\mathrm{d}V' - \varepsilon_0 \oint_S \varphi(\vec{x}\,')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{x}\,',\vec{x})\,\mathrm{d}S'$$

✓ 第二类边值问题：

V 内给定 $\rho(\vec{x})$ 及 V 的外边界上给定电势的法向导数 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$；

若满足如下边界条件格林函数能够求得

$$\nabla^2 G(\vec{x},\vec{x}\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')$$

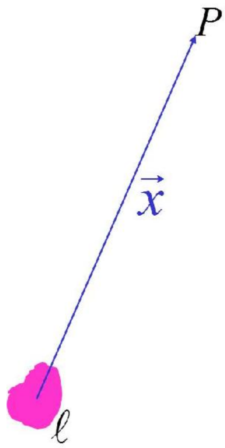
$$\left.\frac{\partial G(\vec{x},\vec{x}\,')}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{S\varepsilon_0}$$

则第二类问题电势的解形式简化为

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}', \vec{x})\rho(\vec{x}')\,\mathrm{d}V' + \varepsilon_0 \oint_S G(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'}\,\mathrm{d}S + \langle \varphi \rangle_S$$

§2.6 电多极矩

实际问题中经常会碰到一种情况：



- 激发电场的电荷全部“集中”在一个很小的区域；
- 要求解远离带电体空间的电场；
- 比如原子核中的电荷所激发的作用在电子上的静电势该如何处理？
- 注意到：原子核中电荷分布的线度为 $\sim 10^{-13}\ \mathrm{cm}$，而电子到原子核的平均距离为 $\sim 10^{-8}\ \mathrm{cm}$。

本节内容我们所关注的是电荷分布区域的尺度 l 远小于场点到源点的距离 r（即：$|\vec{x}| >> \ell$）的静电势问题。我们采取的处理方法是：用点电荷、电偶极矩、电四极矩等的电势的**各项之和**，表示远场处的电势，并且保留更高阶项，这种来近似更准确，当然要

计算更高阶的项，计算变得越复杂。

一、并矢的定义及运算：

1. 并矢的定义：

两个矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 并列，之间不作任何运算，称为并矢，记作 $\vec{A}\vec{B}$

若

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$$

$$\vec{B} = B_1\vec{e}_1 + B_2\vec{e}_2 + B_3\vec{e}_3$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\vec{B} = {} & A_1B_1\vec{e}_1\vec{e}_1 + A_1B_2\vec{e}_1\vec{e}_2 + A_1B_3\vec{e}_1\vec{e}_3 \\ & + A_2B_1\vec{e}_2\vec{e}_1 + A_2B_2\vec{e}_2\vec{e}_2 + A_2B_3\vec{e}_2\vec{e}_3 \\ & + A_3B_1\vec{e}_3\vec{e}_1 + A_3B_2\vec{e}_3\vec{e}_2 + A_3B_3\vec{e}_3\vec{e}_3\end{aligned}$$

根据并矢的定义，比较容易看出：$\vec{A}\vec{B} \neq \vec{B}\vec{A}$

2. 张量分析：

一般地，在三维空间中，2 阶**张量具有 9 个分量**，可表示为

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = \sum_{i,j} T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j, \quad (i,j=1,2,3)$$

按照矩阵的排列方式： $\overset{\leftrightarrow}{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$

- **对称张量：** $T_{ij} = T_{ji}$
- **反对称张量：** $T_{ij} = -T_{ji}$
- **推论：反对称张量，有：** $T_{ii} = 0$
- **单位张量：**

$$\overset{\leftrightarrow}{I} = \vec{e}_1\vec{e}_1 + \vec{e}_2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\vec{e}_3 = \sum_{i,j} \delta_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$$

这里定义： $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

若用矩阵的排列方式：

$$\overset{\leftrightarrow}{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3． 张量和并矢的代数运算：

①并矢与矢量的点乘：

$$\left(\vec{A}\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\vec{A}\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right),$$
$$\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\vec{B}\right)=\left(\vec{C}\cdot\vec{A}\right)\vec{B}$$

所以，一般地

$$\left(\vec{A}\vec{B}\right)\cdot\vec{C}\neq\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\vec{B}\right)$$

②并矢与矢量的叉乘：

$$\left(\vec{A}\vec{B}\right)\times\vec{C}=\vec{A}\left(\vec{B}\times\vec{C}\right),$$
$$\vec{C}\times\left(\vec{A}\vec{B}\right)=\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\vec{B}$$

③张量与矢量的点乘：（转换成并矢与矢量的运算）

$$\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{f}=\sum_{i,j}T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j\cdot\sum_k f_k\vec{e}_k$$
$$=\sum_{i,j,k}T_{ij}f_k\vec{e}_i\delta_{jk}=\sum_{i,j}T_{ij}f_j\vec{e}_i$$

另一方面

$$\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{T}\ =\sum_k f_k\vec{e}_k\cdot\sum_{i,j}T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$$
$$=\sum_{i,j,k}T_{ij}f_k\delta_{ki}\vec{e}_j=\sum_{i,j}T_{ij}f_i\vec{e}_j$$

④并矢与并矢的运算：

$$\left(\vec{A}\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{C}\vec{D}\right)=\vec{A}\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{D}=(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}\vec{D}$$ （并矢）

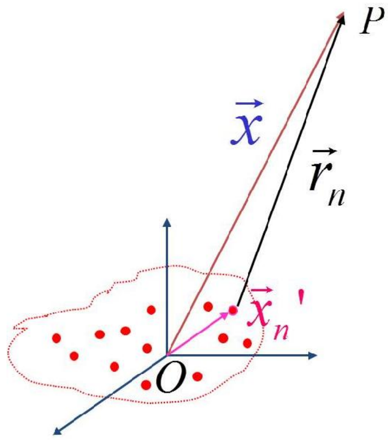
$$\left(\vec{A}\vec{B}\right):\left(\vec{C}\vec{D}\right)=\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)$$ （双点积：标量）

$$\left(\vec{A}\vec{B}\right)\times\left(\vec{C}\vec{D}\right)=\vec{A}\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\vec{D}$$ （三个矢量的并）

二、电势的多级展开：

1. 电多极矩：

假设全空间中有 N 个点电荷分布在区域 V 内，则远离电荷区域的空间一点的电势为



$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{r_n}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{\left|\vec{x}-\vec{x}_n'\right|}$$

由于电荷分布区域的线度远小于电荷到场点的距离，因此函数 $\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}_n'\right|}$ 可以在 $\vec{x}_n'=0$ 处进行泰勒级数展开。

在一维空间，泰勒级数其展开形式为：

$$f(x+\delta)=f(x)+\delta\, f'(x)+\frac{1}{2}\delta^2 f''(x)+\cdots$$

（δ 为小量）

在三维空间： $\vec{\delta}=\sum_{i=1}^{3}\delta_i\vec{\mathrm{e}}_i$， $\nabla=\sum_{i=1}^{3}\vec{\mathrm{e}}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$

在三维空间，泰勒级数其展开形式为：

$$f(\vec{x}+\vec{\delta})=f(\vec{x})+\vec{\delta}\cdot\nabla f(\vec{x})$$

$$+\sum_{i,j}\frac{1}{2}\delta_i\delta_j\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}f(\vec{x})+\cdots$$

利用并矢的双点乘积，展开式第三项为：

$$\sum_{i,j}\delta_i\delta_j\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}f(\vec{x})=\sum_{i,j}\left(\delta_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\delta_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f(\vec{x})$$

$$=(\vec{\delta}\cdot\nabla)(\vec{\delta}\cdot\nabla)f(\vec{x})=\vec{\delta}\vec{\delta}:\nabla\nabla f(\vec{x})$$

三维空间泰勒级数其展开形式可改写为：

$$f(\vec{x}+\vec{\delta})=f(\vec{x})+\vec{\delta}\cdot\nabla f(\vec{x})$$

$$+\frac{1}{2}\vec{\delta}\vec{\delta}:\nabla\nabla f(\vec{x})+\cdots$$

利用此公式，将静电势表达式中的$\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}_n{}'\right|}$展开，得

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{N}q_n\frac{1}{|\vec{x}|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{N}q_n\left(-\vec{x}_n{}'\right)\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{x}|}$$
$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}q_n\vec{x}_n{}'\vec{x}_n{}':\nabla\nabla\frac{1}{|\vec{x}|}+\cdots$$

或者

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\sum_{n=1}^{N}q_n-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum_{n=1}^{N}q_n\vec{x}_n{}'\right)\cdot\nabla\frac{1}{R}$$
$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}q_n\vec{x}_n{}'\vec{x}_n{}'\right):\nabla\nabla\frac{1}{R}+\cdots$$

定义：

$$Q=\sum_{n=1}^{N} q_n, \qquad \text{(系统电量)}$$

$$\vec{p}=\sum_{n=1}^{N} \vec{p}_n=\sum_{n=1}^{N} q_n \vec{x}_n', \quad \text{(系统偶极矩)}$$

$$\overleftrightarrow{D}=\sum_{n=1}^{N} 3 q_n \vec{x}_n' \vec{x}_n' \qquad \text{(系统四极矩)}$$

则

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R}-\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D}:\nabla\nabla\frac{1}{R}+\cdots\right)$$
$$=\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\cdots$$

逐项讨论：

第一项$\varphi^{(0)}$**：**

$$\varphi^{(0)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R},$$

为一个点电荷的电势。

- 相当于所有的点电荷都集中于原点时对应在P点所产生的电势；
- 如果电荷连续分布在小区域V内，则体系的带电量为

$$Q=\int_V \rho\left(\vec{x}'\right)\mathrm{d}V'$$

第二项$\varphi^{(1)}$：

$$\varphi^{(1)}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3}$$

是一个电偶极子的静电势。

- $\vec{p}$ 为体系的电偶极矩； $\vec{p}=\sum_{n=1}^{N}q_n\vec{x}_n{}'$.
- 在体系总电量为零条件下，体系电偶极矩与坐标原点位置的选取无关；
- 如果电荷连续分布在小区域V 内，则体系的电偶极矩为

$$\vec{p}=\int_V \rho\left(\vec{x}'\right)\vec{x}'\,\mathrm{d}V'$$

第三项$\varphi^{(2)}$：

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D}:\nabla\nabla\frac{1}{R}$$

为体系四极矩的电势。

➢ $\overleftrightarrow{D}$ 为体系的四极矩。

$$\overleftrightarrow{D}=\sum_{n=1}^{N}3q_n\vec{x}_n'\vec{x}_n'$$

➢在体系内的电荷分布连续的情况下，其表达式为

$$D=\int_V 3\vec{x}'\vec{x}'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$ 。

举例 1：我们前面讨论过理想偶极子（纯偶极子）的电势:

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

与纯偶极子不同的是，物理偶极子正负电荷具有有一定的空间距离l，因此，在求其远场电势时应当采用多极展开的方法:

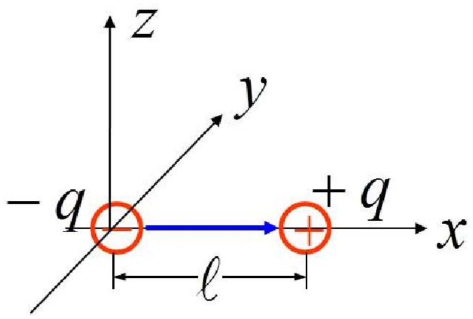
$$\varphi=\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\ldots\ldots$$

a) 由于物理偶极子亦由等量的正负电荷组成，因此，总电量为零，所以$\varphi^{(0)}=0$

b) $\varphi^{(1)} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3}$

(其中：

$\vec{p} = \sum_{n=1}^{N} q_n \vec{x}_n' = q\vec{l}$)



c) 现在关键是如何求解 $\varphi^{(2)}$ ！

根据 $\overleftrightarrow{D} = \sum_{n=1}^{N} 3q_n \vec{x}_n'\vec{x}_n'$ 写成分量（矩阵元）形式：

$$D_{ij} = \sum_{n=1}^{N} 3q_n (x_n')_i (x_n')_j$$

如果我们建立如图坐标系，则：

$$\begin{cases} D_{11} = 3ql^2 \\ D_{1i} = 0, (i \neq 1) \\ D_{ij} = 0, (i, j \neq 1) \end{cases}$$

同时，注意到：

$$\vec{\delta}\vec{\delta}:\nabla\nabla f(\vec{x})=(\vec{\delta}\cdot\nabla)(\vec{\delta}\cdot\nabla)f(\vec{x})$$

$$=\sum_{i,j}\left(\delta_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\delta_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f(\vec{x})=\sum_{i,j}\delta_i\delta_j\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}f(\vec{x})$$

（这里同学需要注意：并矢双内积只是为了形式上好看，实际上我们在计算具体问题时还是要回到微分运算的表达式来运算）

因此：

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\vec{D}:\nabla\nabla\frac{1}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\sum_{i,j}D_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}3ql^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$=\frac{ql^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{3x^2-R^2}{R^5}$$

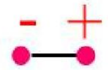
同学们可以据此计算出物理偶极子和纯偶极子产生的电场，并结合 Ch1-1 中我们给出电场线的分布对物理偶极子和纯偶极子加深认识和理解！

➤单极子（Monopole）:由单个点电荷组成

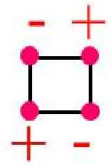
$$\varphi=\varphi^{(0)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}\Rightarrow\varphi\propto\frac{1}{R}$$

➢偶极子（Dipole）:由一正一负（等量异号）点电荷组成

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= 0 \\ \varphi^{(1)} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi \propto \frac{1}{R^2}$$

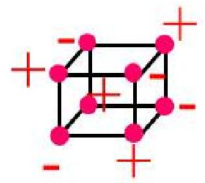


➢四极子（Quadrupole）:一对偶极子“反平行”排列



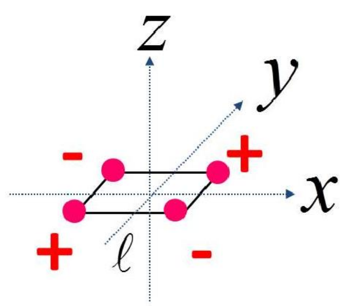
$$\varphi^{(0)} = \varphi^{(1)} = 0 \Rightarrow \varphi \propto \frac{1}{R^3}$$

➢八极子（Octapole）：一对四极子“反平行”排列



$$\varphi^{(0)} = \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0 \Rightarrow \varphi \propto \frac{1}{R^4}$$

举例 2：对上面提及的物理四极子进行讨论。



假设电荷处于 xy 平面内，正负电荷之间的间距为 l。将坐标原点选在四极子的中心。

a) 很明显，四极子的总电量为零，因此：

$$\varphi^{(0)} = 0$$

b)其次：由于 $\vec{p}=\sum_{n=1}^{N}q_n\vec{x}_n'=0$

$$\phi^{(1)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3}=0$$

c)四极子项：

$$\begin{cases}\varphi^{(2)}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{6}\sum_{i,j}D_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{1}{R}\right)\\ D_{ij}=\sum_{n=1}^{N}3q_n(x_n')_i(x_n')_j\end{cases}$$

由于电荷处在 xy 平面内，则：

$$D_{3j}=D_{i3}=0$$

由此：

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\left[D_{xx}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+D_{yy}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+2D_{xy}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right]\left(\frac{1}{R}\right)$$

其中：

$$D_{xx}=$$
$$3\left[q\left(\frac{l}{2}\right)^2+(-q)\left(\frac{l}{2}\right)^2+q\left(-\frac{l}{2}\right)^2+(-q)\left(-\frac{l}{2}\right)^2\right]$$
$$=0$$

$$D_{yy}=0$$

$$D_{xy}=$$

$$3\left[q\left(\frac{l}{2}\right)^2+(-q)\left(\frac{l}{2}\right)\left(-\frac{l}{2}\right)+q\left(-\frac{l}{2}\right)^2+(-q)\left(\frac{l}{2}\right)\left(-\frac{l}{2}\right)\right]$$

$$=3ql^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$=3xy(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

综上：

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\left[2D_{xy}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right]\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}(2\times 3ql^2)\times 3xy(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$=\frac{3}{4\pi\varepsilon_0}ql^2\frac{xy}{R^5}$$

$$=\frac{3}{4\pi\varepsilon_0}ql^2\frac{1}{R^3}\left[(\cos\theta)^2\sin\phi\cos\phi\right]\propto\frac{1}{R^3}$$

感兴趣的同学可以去尝试一下，如果坐标原点没有建立在四极子的中心，而是随机建立，一样可以的到相同的电四极矩表达式。这是由于这个体系的零级和偶极矩都是为零的。

2. 电四极矩张量：

一般体系的四极矩特性：

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{D} = \ & D_{11}\vec{e}_1\vec{e}_1 + D_{12}\vec{e}_1\vec{e}_2 + D_{13}\vec{e}_1\vec{e}_3 \\ & + D_{21}\vec{e}_2\vec{e}_1 + D_{22}\vec{e}_2\vec{e}_2 + D_{23}\vec{e}_2\vec{e}_3 \\ & + D_{31}\vec{e}_3\vec{e}_1 + D_{32}\vec{e}_3\vec{e}_2 + D_{33}\vec{e}_3\vec{e}_3\end{aligned}$$

体系的四极矩是一个并矢，计有 9 个分量；考虑到它的对称性，以及可以进行无迹化，实际上只有 5 个独立的分量，即：

D_{11}, D_{22}, D_{33}, $D_{12}=D_{21}$, $D_{23}=D_{32}$, $D_{31}=D_{13}$。

证明如下：

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \frac{1}{R} = \sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R}$$

根据单位张量的定义：

$$\overleftrightarrow{I} = \vec{e}_1\vec{e}_1 + \vec{e}_2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\vec{e}_3 = \sum_{i,j} \delta_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

可将上式写为

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{1}{R} &= \sum_{i,j} \delta_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j : \sum_{k,l} \vec{e}_k \vec{e}_l \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{1}{R} \right) \\ &= \overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla \frac{1}{R}\end{aligned}$$

前面已得：如果$R \neq 0$，则$\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$。因此

$$\overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla \frac{1}{R} = 0$$

或者

$$\left[-\frac{1}{6}\int_V \vec{x}'^2 \rho(\vec{x}') \mathrm{d}V\right] \overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = 0$$

所以，可以将电势展开式中第三项

$$\begin{cases} \varphi^{(2)} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{6}\overleftrightarrow{D} : \nabla\nabla \dfrac{1}{R} \\ \overleftrightarrow{D} = \int_V 3\vec{x}'\vec{x}' \rho(\vec{x}') \mathrm{d}V' \end{cases}$$

中的四极矩改写为

$$\overleftrightarrow{D} = \int_V \left(3\vec{x}'\vec{x}' - \vec{x}'^2 I\right) \rho(\vec{x}') \mathrm{d}V'$$

——电四极矩张量

$$\overleftrightarrow{D} = \sum_{i,j} D_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j,$$

$$D_{ij} = \int_V \left(3x_i' x_j' - \vec{x}'^2 \delta_{ij}\right) \rho(\vec{x}') \mathrm{d}V'$$

如果系统为点电荷体系，则电四极矩张量定义为

$$\overleftrightarrow{D}=\sum_{n=1}^{N} q_n\left(3\vec{x}_n'\vec{x}_n'-\vec{x}_n'^2\, I\right)=\sum_{i,j} D_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j ,$$

$$D_{ij}=\sum_{n=1}^{N} q_n\left[3(x_n')_i(x_n')_j-\vec{x}_n'^2\,\delta_{ij}\right]$$

电四极矩张量的性质：

❖ 对称性：$D_{ij}=D_{ji}$；

❖ 无迹性：$D_{11}+D_{22}+D_{33}=0$

根据这两个性质，可以推论出电四极矩张量的 9 个分量中只有 5 个是独立的。

如果电荷的分布具有球对称性，则

$$D_{11}=D_{22}=D_{33}=0$$

并且有

$$D_{12}=D_{23}=D_{31}=0$$

例如：$D_{12}=\sum_{n=1}^{N} 3x_n' y_n' q_n$，由电荷分布的球对称性，即如果在点$(x,y,z)$处存在一个点

电荷q，则必然在

$$(-x,-y,z),\ (-x,y,z),\ (x,-y,z)$$

和

$$(x,y,-z),\ (-x,-y,-z),\ (-x,y,-z),\ (x,-y,-z)$$

存在等量的电荷。由于这些贡献项互相抵消，使得

$$D_{12}=\sum_{n=1}^{N}3x_n'y_n'q_n=0$$

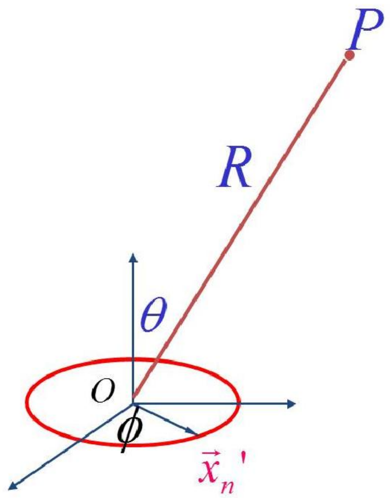
同样得到

$$D_{23}=D_{31}=0$$

结论：

- 如果电荷的分布具有球对称性，则无电四极矩；
- 当电荷的分布偏离球对称时，一般会出现电四极矩；
- 因此通过测量远场电势的电四极矩贡献项，就可以对电荷的分布做一定的推论；
- 从物理上讲，电偶极矩考量的是体系是否具有镜面对称性破缺；电四极矩则考量体系是否具有球对称破缺。如果破缺了，则必会出现相应的极矩。

例题： 均匀带电的圆环，电荷量为 q，半径为 a。环外为真空。试求在离环心为 R（$R >> a$）处的电势（到二级近似）。



解： 以环心为原点，环的轴线为轴，建立图示的坐标系。

a) 电势的零级近似为

$$\varphi^{(0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

b) 电势的一级近似为

$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3}$$

$\vec{p}$ 为环上的电荷对环心的电偶极矩。根据定义，

$$\vec{p} = \int \vec{r}\mathrm{d}q = \oint_L \vec{r}\mathrm{d}q$$

$$= \oint \lambda a\vec{r}\mathrm{d}\phi = 0$$

$$\varphi^{(1)} = 0$$

c) 电势的二级近似为

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}D:\nabla\nabla\frac{1}{R}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\sum_{i,j}D_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$D_{ij} = \int\left(3x_i'x_j' - \vec{x}'^2\,\delta_{ij}\right)\mathrm{d}q$$

先讨论$i \neq j$的情况，则

$$D_{ij} = \int 3x_i'x_j'\,\mathrm{d}q\ ,$$

由于电荷分布在xy面上，有$x_3' = z' = 0$

所以

$$D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} = 0$$

$$D_{12} = D_{21} = 3\int_L x'y'\,\mathrm{d}q = 3\int_0^{2\pi} x'y'\lambda a\,\mathrm{d}\phi$$

$$= 3\,\lambda a^3\int_0^{2\pi}\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi = 0$$

于是可将电势二级近似简化成

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\sum_i D_{ii}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$
\begin{aligned}
D_{11} &= \int_L \left(3x'^2 - r'^2\right)\mathrm{d}q \\
&= \lambda a \int_0^{2\pi} \left(3x'^2 - a^2\right)\mathrm{d}\phi \\
&= \lambda a \left(3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\phi \,\mathrm{d}\phi - a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\right) \\
&= \lambda a^3 \left(3\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\phi}{2}\mathrm{d}\phi - 2\pi\right) \\
&= \lambda \pi a^3 = \frac{1}{2} q a^2
\end{aligned}
$$

同理可得

$$D_{22} = \int_L \left(3y'^2 - r'^2\right)\ \mathrm{d}q = \frac{1}{2} q a^2$$

$$D_{33} = \int_L \left(-r'^2\right)\mathrm{d}q = -qa^2$$

或者根据 $D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0$，得 $D_{33} = -qa^2$。

将上述各式代入二级近似项

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(2)} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\sum_i D_{ii}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{R}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\left(D_{11}\frac{\partial^2 (1/R)}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 (1/R)}{\partial y^2} + D_{33}\frac{\partial^2 (1/R)}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}
$$

根据

$$\frac{\partial^2(1/R)}{\partial x^2}=\frac{3x^2-R^2}{R^5},$$

$$\frac{\partial^2(1/R)}{\partial y^2}=\frac{3y^2-R^2}{R^5},$$

$$\frac{\partial^2(1/R)}{\partial z^2}=\frac{3z^2-R^2}{R^5}$$

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{24\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^5}$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2}qa^2(3x^2-R^2)+\frac{1}{2}qa^2(3y^2-R^2)-qa^2(3z^2-R^2)\right]$$

$$=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^5}\left[\frac{1}{2}qa^2x^2+\frac{1}{2}qa^2y^2-qa^2z^2\right]$$

$$\varphi^{(2)}=\frac{qa^2}{16\pi\varepsilon_0R^5}(x^2+y^2-2z^2)=\frac{qa^2}{16\pi\varepsilon_0R^5}(R^2-3z^2)$$

$$=\frac{qa^2}{16\pi\varepsilon_0R^3}(1-3\cos^2\theta)$$

电势的近似表达式为

$$\varphi=\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R}+\frac{qa^2}{16\pi\varepsilon_0R^3}(1-3\cos^2\theta)$$