第三章 静磁场

本章我们讨论稳定所激发的静磁场。

在恒定电流问题中，因为要维持导体中的电流，导体中就要有一定的电场，而且在产生电流的电源以及导体表面上，都带有一定的静电荷，因而导线周围的空间也是存在电场；由于电场是恒定的，电场和磁场不发生直接联系，因而可以把电场和磁场分离开俩求解。

补充：恒定电流体系有如下特点：

电荷守恒定律：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{J}=0.$$

对于稳定电流，由于$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$，因此有:

$$\nabla\cdot\vec{J}=0$$

- 稳恒电流线都是闭合线，稳定电流流动不会引起电荷密度随时间发生堆积；
- 导体的内部和周围空间都存在一定电场分布，
- 对于通常导体，由于损耗的存在，为保持电流恒定流动，必须有电源提供外来电动势。

- 恒定电流条件下，电场和磁场不发生直接联系，体系所激发的电场和磁场相互独立，其电场满足方程：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\nabla\times\vec{E}=0$$

磁场部分所满足方程：

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f,\nabla\cdot\vec{B}=0$$

电场和磁场可以独立求解。

§1. 描述磁场的矢势概念

1、静磁场是一个赝矢量

赝矢量又称为伪矢量;

伪矢量在坐标系做空间反演变换时，该矢量的方向不会发生改变;

如果一个矢量在坐标系做空间反演变换时，该矢量的符号改变，则称为真矢量。

常见的真矢量有：速度矢量$\vec{v}=\frac{d\vec{x}}{dt}$，电流密度矢量：$\vec{J}=\rho\vec{v}$，$\vec{J}=\sigma\vec{E}$，点电荷的电场矢量：$d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}dq$

常见的赝矢量有：力矩矢量$\vec{L}=\vec{x}\times\vec{F}$，电流元的磁场矢量$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}dV\times\vec{r}}{r^3}$。

可以看出，赝矢量是由两个真矢量叉乘所得。

同样标量也有真标量和赝标量之分。

真标量在空间反演时则不改变符号，例如微观粒子的电荷密度：$\rho(-\vec{x})=\rho(\vec{x})$。

赝标量在空间反演时改变符号，例如$\vec{E}\cdot\vec{B}$。

2．磁场的矢势描述

1）考察恒定电流分布所激发的磁场

由于和周围磁性物质的相互作用产生磁化电流，磁场和磁化电流是相互制约的，因此求解这类问题也如求解静电学问题一样，使用求解微分方程的边值问题。下面我们先引入磁场的矢势。

由于静磁场是有旋无源场$\nabla\cdot\vec{B}=0$，磁感应线是闭合曲线，**总可以引入另一个矢量场$\vec{A}$来描述，矢量场$\vec{A}$满足：**

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

矢量$\vec{A}$称为磁场的矢势。

2）矢势规范变换不变性

由矢势$\vec{A}$可以确定唯一的磁场$\vec{B}$，但是由磁场$\vec{B}$并不能唯一的确定矢势$\vec{A}$；

对于一个确定的磁场$\vec{B}$，矢势$\vec{A}$仍具有一定任意性，可以相差一个任意标量函数的梯度，即进行如下变换：

$$\vec{A}\to\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\psi$$

$$\vec{B}'=\nabla\times\vec{A}'$$

$$= \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \psi)$$

$$= \nabla \times \vec{A} = \vec{B}.$$

变换前后的矢势$\vec{A}$和矢势$\vec{A}'$所描写的是同一磁场，这种任意性是由于矢势$\vec{A}$的环量才具有物理意义，而每一个点上的$\vec{A}$本身没有直接的物理意义。

3）规范（辅助）条件

为了减少任意性，确定$\vec{A}$，还需要知道$\vec{A}$的散度。我们可以对$\vec{A}$的散度加上一些限制条件，称之为**规范辅助条件，或者简称为规范条件**

电磁场本身对$\vec{A}$的散度没有具体的要求，对于同一个磁场有无穷多的矢势与之对应，但是电场和磁场的性质与这里所选的规范无关。

常用的规范有库仑规范条件：

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

在第五章将介绍，对于随时间变化的电磁场，同样可以引入相应的标势和矢势；而对于矢势，可以采用洛伦兹规范条件：

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

3、矢势所满足的微分方程

我们结合物质的电磁性质方程，并利用库仑规范条件，就可以得出矢势$\vec{A}$所满足的微分方程。

对于均匀线性介质

$$\vec{B}=\mu\vec{H},$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu\vec{J}_f$$

带入

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

得到：

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\mu\vec{J}_f,$$

$$\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=\mu\vec{J}_f$$

利用库仑规范条件$\nabla\cdot\vec{A}=0$，得到:

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}_f$$

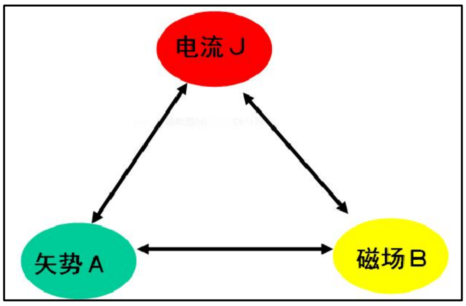
上式的分量形式表示为：

$$\nabla^2 A_i=-\mu J_i,\qquad \left(i=1,2,3\right)$$

可见，在库仑规范下，矢势$\vec{A}$的每一个直角分量都满足泊松方程。

4、静磁场的基本公式

至此我们可以得到静磁场、矢势、电流的相互关系如下图：



$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

毕奥-萨伐耳定律（电流源与场）

$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V$$

安培定律（磁场旋度与该处电流密度矢量之关系）

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

磁感应强度与矢势：

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

矢势与电流：:

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}\left(\vec{x}'\right)\mathrm{d}V'}{r}$$

矢势满足库伦规范：

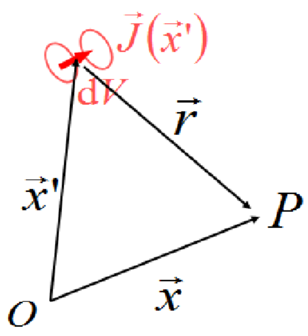
$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

矢势对应的微分方程：

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}_f$$

5、全空间的矢势解

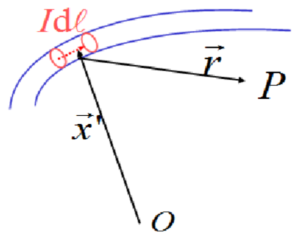
在全空间给定电流的体分布，则矢势的解为：



$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}\left(\vec{x}'\right)\mathrm{d}V'}{r}$$

上述表达式满足库伦规范条件。

对于全空间，如果电流分布在细导线中

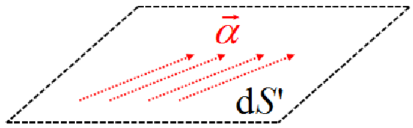


由 $\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V' \to I\ \mathrm{d}\vec{\ell}$ 有：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{r}$$

对于电流限于面分布的情况

$$\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V' \to \vec{\alpha}(\vec{x}')\mathrm{d}S'$$



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{\alpha}(\vec{x}')\mathrm{d}S'}{r}$$

由此可以归纳起来得到：

$$\to \int_{line}(\ )I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \sim \int_{surface}(\ )\vec{\alpha}\ \mathrm{d}S' \sim \int_{volume}(\ )\vec{J}\ \mathrm{d}V'$$

例题 1：写出均匀磁场的矢势

解：假设： $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$，则矢势可取为：

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}_0 \times \vec{r} = \frac{B_0}{2}\left(-y\vec{\mathrm{e}}_x + x\vec{\mathrm{e}}_y\right)$$

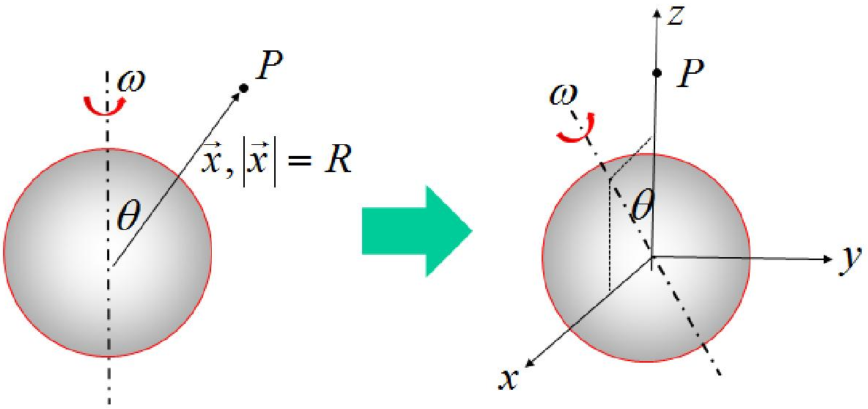
或者：

$$\vec{A} = B_0[-\alpha y\vec{e}_x + (1-\alpha)x\vec{e}_y],$$

其中α为任意常数，上面的两种矢势形式都满足库仑规范条件。

例题2：有一均匀带电的薄球壳，其半径为R_0，总电荷为Q，今使球壳绕自身某一直径以角速度ω转动，求球内外的矢势和磁场。

解:为了使得问题的求解过程简化，把坐标系的z轴选取沿着场点的位矢方向，而转轴则处于xz面内。



球面上均匀分布电荷，由于球壳转动，电流为面电流，因此球面上x’处的电流密度矢量为：

$$\vec{\alpha}(\vec{x}') = \sigma\vec{v},$$

σ为电荷的面密度，$\vec{v}$而则为该处的旋转的线速度，

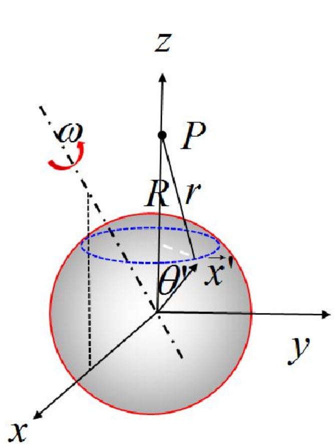
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{\alpha}(\vec{x}')\mathrm{d}S'}{r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\sigma\vec{v}(\vec{x}')\mathrm{d}S'}{r}$$

r为场点到源点的距离：

$$r = \sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\theta'}$$

速度$\vec{v}$为：



$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{x}'$$

其中：

$$\vec{x}'=\left(R_0\sin\theta'\cos\phi',R_0\sin\theta'\sin\phi',R_0\cos\theta'\right)$$

可得：

$$\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{\mathrm{e}}_x & \vec{\mathrm{e}}_y & \vec{\mathrm{e}}_z \\ \omega\sin\theta & 0 & \omega\cos\theta \\ R_0\sin\theta'\cos\phi' & R_0\sin\theta'\cos\phi' & R_0\cos\theta' \end{vmatrix}$$

即：

$$\begin{aligned}\vec{v}=&-R_0\omega\left(\cos\theta\sin\theta'\sin\phi'\right)\vec{e}_x\\&+R_0\omega\left(\cos\theta\sin\theta'\cos\phi'-\sin\theta\cos\theta'\right)\vec{e}_y\\&+R_0\omega\sin\theta\sin\theta'\sin\phi'\vec{e}_z\end{aligned}$$

计算积分 $\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_S\dfrac{\vec{\alpha}\left(\vec{x}'\right)\mathrm{d}S'}{r}$

其中：$\mathrm{d}S'=R_0^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\frac{\sigma\vec{v}\left(\vec{x}'\right)}{r}R_0^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$$

考虑到：$\int_0^{2\pi}\sin\phi'\mathrm{d}\phi'=\int_0^{2\pi}\cos\phi'\mathrm{d}\phi'=0$

$$\vec{A}=-\frac{\mu_0R_0^3\sigma\omega\sin\theta}{2}\left(\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta'\sin\theta'}{\sqrt{R_0^2+R^2-2R_0R\cos\theta'}}\mathrm{d}\theta'\right)\vec{e}_y$$

令 $u=\cos\theta'$，上述括号中的积分为：

$$\int_{-1}^{1}\frac{u}{\sqrt{R_0^2+R^2-2R_0Ru}}\mathrm{d}u$$
$$=-\frac{R_0^2+R^2+R_0Ru}{3R_0^2R^2}\sqrt{R_0^2+R^2-2R_0Ru}\Big|_{-1}^{+1}$$
$$=\frac{-1}{3R_0^2R^2}\left[\left(R_0^2+R^2+R_0R\right)\cdot\left|R_0-R\right|-\left(R_0^2+R^2-R_0R\right)\left(R_0+R\right)\right]$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0R_0\sigma\omega\sin\theta}{6R^2}\times$$
$$\left[\left(R_0^2+R^2+R_0R\right)\cdot\left|R_0-R\right|-\left(R_0^2+R^2-R_0R\right)\left(R_0+R\right)\right]\vec{e}_y$$

1）当 P 点位于球内时，

$$\left(R_0^2+R^2+R_0R\right)\cdot\left|R_0-R\right|-\left(R_0^2+R^2-R_0R\right)\left(R_0+R\right)=-2R^3$$

因此有：

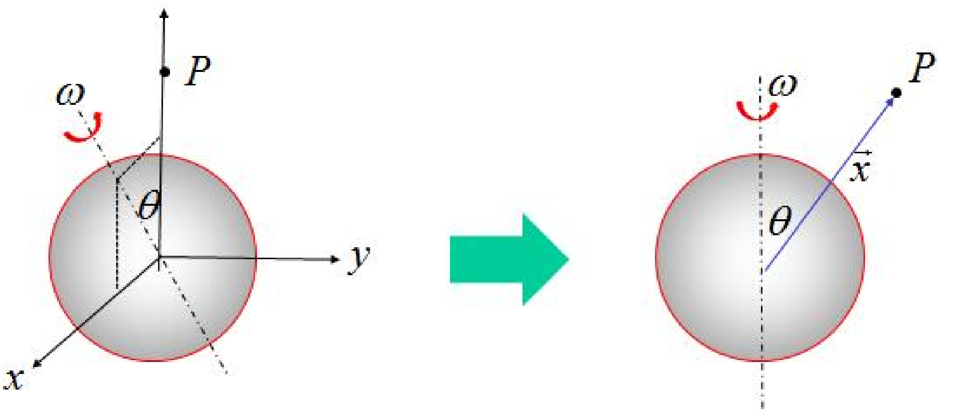
$$\vec{A}_{inside}=-\frac{\mu_0R_0\sigma}{3}\omega R\sin\theta\vec{e}_y$$
$$=\frac{\mu_0R_0\sigma}{3}\left(\vec{\omega}\times\vec{x}\right)$$

其中$\left|\vec{x}\right|=R$

2）当 P 点位于球外时，

$$\vec{A}_{outside}=\frac{\mu_0R_0^4\sigma}{3R^3}\left(\vec{\omega}\times\vec{x}\right)$$

我们再把以上结果变换到常规坐标选择中有：



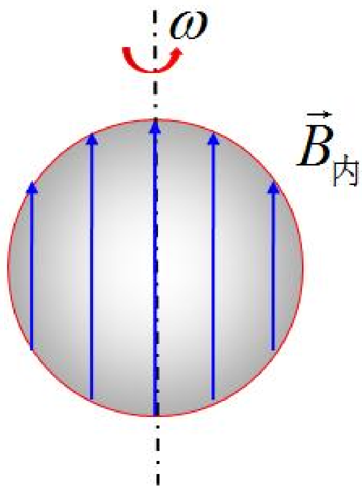
$$\vec{A}_{inside}=\frac{\mu_0 R_0\sigma}{3}\left(\vec{\omega}\times\vec{x}\right)=\frac{\mu_0 R_0\omega\sigma}{3}R\sin\theta\vec{e}_{\phi},\ \left(R\geq R_0\right)$$

$$\vec{A}_{outside}=\frac{\mu_0 R_0^4\sigma}{3R^3}\left(\vec{\omega}\times\vec{x}\right)=\frac{\mu_0 R_0^4\omega\sigma}{3}\frac{\sin\theta}{R^2}\vec{e}_{\phi},\ \left(R\geq R_0\right)$$

根据球壳内的矢势：

$$\vec{A}_{inside}=\frac{\mu_0 R_0\omega\sigma}{3}R\sin\theta\vec{e}_{\phi},\ \left(R\leq R_0\right).$$

可以证明， 球内的磁场为均匀磁场：



$$\vec{B}_{inside}=\nabla\times\vec{A}_{inside}$$

$$=\frac{2\mu_0 R_0\omega\sigma}{3}R(\cos\theta\vec{e}_r\text{-}\sin\theta\vec{e}_\theta)$$

$$=\frac{2}{3}\mu_0 R_0\omega\sigma\vec{e}_z$$

$$=\frac{2}{3}\mu_0 R_0\sigma\vec{\omega}$$

6、矢势的边界条件

在满足库仑规范条件$\nabla\cdot\vec{A}=0$的条件下，矢势满足泊松方程：

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$$

其分量形式为$\nabla^2 A_i=-\mu J_i,\quad (i=1,2,3)$

知道了矢势$\vec{A}$满足的微分方程，还要知道矢势$\vec{A}$所满足的边值条件，才可以求解微分方程。

通过磁场$\vec{B}$的边界条件，就可以得到矢势$\vec{A}$的边界条件。下面分别计算对于线性均匀介质矢势$\vec{A}$在沿切向和法向的边值关系。

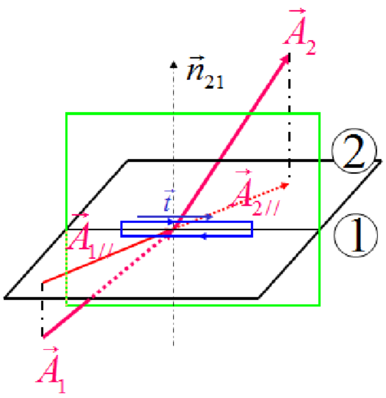
1） 矢势沿分界面的切向分量

利用矢势其积分关系

$\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=\oint_L\vec{A}\cdot d\vec{\ell}$，对介质的分界面上积分得到：

$$\vec{n}_{21}\times\left(\vec{A}_2-\vec{A}_1\right)=0$$

矢势沿分界面的切向分量连续。



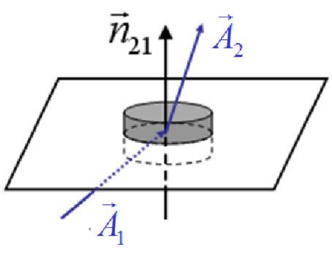
2）矢势在分界面处的法向分量

在库仑规范下：

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

在介质分界面处必须满足：

$$\oint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=0$$



因此在介质的分界面两侧有：

$$A_{1n} = A_{2n}$$

即在库仑规范下，矢势的法向分量连续。

6、静磁场的能量

线性介质内电磁能量密度的表达式为：

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$$

1） 静磁场的总能量

前面得到静磁场的能量为：

$$W_{total(m)} = \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{B}\cdot\vec{H}\ \mathrm{d}V$$

下面采用矢势$\vec{A}$及电流密度$\vec{J}$表示静磁场的总能量：

利用：

$$\begin{aligned}\vec{B}\cdot\vec{H} &= \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{H}\\ &= \nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{H}\right) + \vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)\\ &= \nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{H}\right) + \vec{A}\cdot\vec{J}_f\end{aligned}$$

带入$W_{total(m)}$，其中第一项可化为无穷界面上的积分而趋近于零，所以有：

$$\begin{aligned}W_{total(m)} &= \frac{1}{2}\int_{\infty}\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{H}\right)\ \mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_{\infty}\vec{A}\cdot\vec{J}_f\ \mathrm{d}V\\ &= \frac{1}{2}\int_{\infty}\vec{A}\cdot\vec{J}_f\ \mathrm{d}V\end{aligned}$$

- 积分的区域仅需遍及电流的分布区域 V，和静电情况类似;

- 此式仅对总能量有意义，不能把$\frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{J}_f$看做能量密度，因为磁场的能量分布于整个磁场内，而不仅仅存在于电流的分布区域。

2） **磁相互作用能**

下面来讨论如何计算某电流分布$\vec{J}$在给定外磁场中的相互作用能量。以$\vec{A}_e$表示外磁场在该处的矢势，$\vec{J}_e$表示产生该外磁场的电流分布;

$\vec{J}$在外磁场中的磁相互作用能为：

$$W_{\text{int}}=\frac{1}{2}\int\left(\vec{J}\cdot\vec{A}_e+\vec{J}_e\cdot\vec{A}\right)\,\mathrm{d}V$$

利用全空间矢势的表达式 ：

$$\vec{A}\left(\vec{x}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\left(x'\right)}{r}\mathrm{d}V',\quad \vec{A}_e\left(\vec{x}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}_e\left(x'\right)}{r}\mathrm{d}V'$$

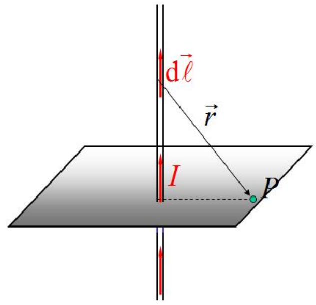
可以得到：$\int\vec{A}_e\cdot\vec{J}\,\mathrm{d}V=\int\vec{A}\cdot\vec{J}_e\,\mathrm{d}V$

因此，$\vec{J}$在外磁场中的磁相互作用能为：

$$W_{\text{int}}=\int\vec{A}_e\cdot\vec{J}\,\mathrm{d}V$$

例题 3：无限长直导线，通有电流 I，求其周围的矢势分布。

解：根据矢势的计算公式：



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_V \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{r}$$

可知矢势 $\vec{A}$ 只有沿着 z 轴的分量：

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2+R^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\lim_{Z\to\infty}\ln\left(z+\sqrt{z^2+R^2}\right)\Big|_{-Z}^{Z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\lim_{Z\to\infty}\ln\left(\frac{Z+\sqrt{Z^2+R^2}}{-Z+\sqrt{Z^2+R^2}}\right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\lim_{Z\to\infty}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+(R/Z)^2}}{-1+\sqrt{1+(R/Z)^2}}\right) \end{aligned}$$

积分是发散的，计算两点的矢势差可以免除发散，取与导线距离为 R_0 处的矢势为零，则有：

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\lim_{Z\to\infty}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1+(R/Z)^2}}{-1+\sqrt{1+(R/Z)^2}} - \ln\frac{1+\sqrt{1+(R_0/Z)^2}}{-1+\sqrt{1+(R_0/Z)^2}}\right]$$

或者：

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{R}{R_0}$$

则可计算出磁场为：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \vec{e_z} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e_\varphi}$$