§ 3.2 磁标势

对于稳恒电流所产生的磁场，可以通过求解矢势来求解磁场，而不直接采用毕奥-萨伐耳定律。但一般情况下，求解矢势的边值问题仍相对复杂。

我们提出这样一个问题，能否也可以把磁场写成$\vec{B}=-\nabla\phi$的形式?或者说，能否把求解磁场转化成求解一个标量场的问题？很显然，安培定律$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$告诉我们，一般情况下是不容许这种的描述。

我们接下来分析，在某些特定的问题仍可以采用磁标势来描述磁场。在这样的特定情况下，关于静磁场的边值问题求解就变得与静电场像类似。

本节内容：

- 磁场的磁标势描述。
- 磁标势所满足的微分方程
- 磁标势的边值关系

1、 磁场的磁标势描述

关于一般磁场的麦克斯韦方程（微分及积分形式）：

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

$$\oint_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_S\vec{J}_f\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

对于静磁场，有两个重要的关系式：

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f,$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}_f \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

假设我们所讨论的区域内没有传导的电流，则在区域内的每一点有：

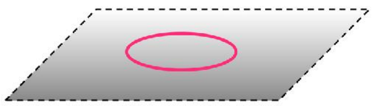
$$\nabla \times \vec{H} = 0$$

这一特点类似与我们上一章讨论的静电场的特点，即区域内的场的无旋性。

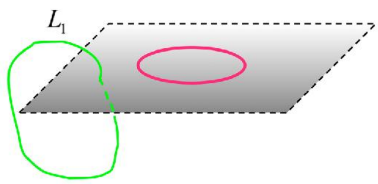
现在提出这样一个问题：如果所讨论的区域没有传导的电流，那么是否就一定可以采用类似电势的磁势来描述区域内的静磁场？答案是否。为什么？

原因是$\nabla \times \vec{H} = 0$只给出了区域内磁场强度特性之一。要求解区域内的磁场，除了满足上述微分方程外，还要满足边值关系，例如还需要保证在求解区域内：$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}_f \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$。

我们**具体分析这样一个的例子**： 除了载流线圈所处的位置，空间任意一点的磁场强度满足$\nabla \times \vec{H} = 0$。现在的问题是：除了载流线圈所在位置，磁场强度是否都可以表示$\vec{H} = -\nabla \phi_m$的形式？



对于不链含线圈的积分回路 L1：



$$\oint_{L_1} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\nabla \times \vec{H}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$
$$= -\int_S \left(\nabla \times \nabla \phi_m\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \equiv 0$$

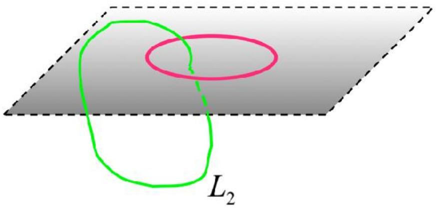
由于积分回路所包围的面内无电流穿过，因此由麦克斯韦方程得：

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}_f \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

可以看到，对于路径 L_1，采用磁标势方式给出的结果与麦克斯韦方程的结果相一致。

然而，对于某链含了线圈的积分回路 L_2，假设回路 L_2 上的每一点的磁势都有定义，则：



$$\oint_{L_1} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{H}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= -\int_S \left(\nabla\times\nabla\phi_m\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \equiv 0$$

但由于存在电流穿过积分回路所包围的面，由麦克斯韦方程得：

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}_f \cdot \mathrm{d}\vec{S} \neq 0$$

可以看出，基于磁标势给出的结果与麦克斯韦方程给出的结果相矛盾。

有了这个分析，我们可以做这样一个推论：对于上面的例子，如果所求解问题的边界不包括以载流线圈为边的一个曲面，即所考察的区域是单连通的，则无电流体分布的情况下在该区域内，可以引入磁标势来描述磁场强度

$$\nabla\times\vec{H} = 0$$

$$\vec{H} = -\nabla\phi_m.$$

当然，对于另一种情况，即如果所求解的全空间没有传导电流，则在整个空间存在$\nabla\times\vec{H}=0$，因此总可以引入磁标势来描述磁场$\vec{H}=-\nabla\phi_m$。还需要说明的是，在我们的教材中是把磁场强度写成磁标势的梯度的负值，而不是磁感应强度。所以磁感应强度可以表示为

$$\vec{B} = -\mu_0\nabla\phi_m$$

在静磁场的边值问题中，采用磁标势处理的条件是：

- 所讨论的空间为单连通区域，并且区域内无传导电流；
- 或者全空间无传导电流，则在全空间都可以定义磁标势。

有兴趣同学请参考：《经典电动力学》，著者：曹昌祺，复旦大学出版社。

2、磁标势所满足的微分方程

1）回顾一下静电场的电势所满足的微分方程：

一般的形式：

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_f+\rho_P}{\varepsilon_0}$$

对于均匀、各向同性、线性介质，

$$\nabla^2\phi\left(\vec{x}\right)=-\frac{\rho_f\left(\vec{x}\right)}{\varepsilon}$$

对于各向同性的线性介质，如果内部没有自由电荷，则静电势满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi=0$$

2）磁标势所满足的微分方程

根据一般定义式： $\vec{B}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)$

以及麦克斯韦方程之一： $\nabla\cdot\vec{B}=0$

得：

$$\nabla\cdot\vec{H}=-\nabla\cdot\vec{M}$$

定义 ：

$$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}$$

此处 ρ_m 称为磁荷密度。由于在接下来给出的公式中 ρ_m 与极化电荷密度 ρ_P 的地位相当而得名。则：

$$\nabla\cdot\vec{H}=\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

即得到：

$$\nabla^2\phi_m=-\frac{\rho_m}{\mu_0} \qquad \text{——（2.16）}$$

3）比较静电场与静磁场：

静电场	静磁场（假设是无自由电流 $\vec{J}_f=0$ 的单连通区域）

$\nabla\times\vec{E}=0$	$\nabla\times\vec{H}=0$
$\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}$	$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}$ (general)
$\nabla\cdot\vec{E}=\left(\rho_P+\rho_f\right)/\varepsilon_0$	$\nabla\cdot\vec{H}=\rho_m/\mu_0,\vec{B}=-\mu_0\nabla\phi_m$
$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$	$\vec{B}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)$ (general)
$\vec{E}=-\nabla\phi$	$\vec{H}=-\nabla\phi_m$
$\nabla^2\phi=0\quad\left(\rho_f=0\right)$	$\nabla^2\phi_m=-\rho_m/\mu_0\quad\left(\vec{J}_f=0\right)$

3、磁标势的边值关系

1）磁标势的边值关系之一

我们知道，磁感应强度和磁场强度的边值关系为

$$\vec{n}_{21}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_f$$

$$\vec{n}_{21}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0$$

假设：区域边界没有自由电流，则此边界条件为

$$\vec{n}_{21}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0$$

或者

$$H_{1t}=H_{2t}$$

仿照教材关于静电势的边界条件的讨论，如果区域边界没有自由电流（比如永磁体），则得：

$$\phi_1=\phi_2 \qquad \text{——边界条件之一}$$

结论：**当所讨论的区域边界没有自由电流时**，磁标势在分界面的两侧连续。对于超导体表面存在的超导电流，我们把它视为磁化电流，所以对于超导

体，同样可以采用这样的边界条件。

2）磁标势的边值关系之二

磁感应强度的法向分量之边值关系：

$$B_{1n}=B_{2n}$$

$$\vec{B}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)$$

得$\vec{H}$与$\vec{M}$之和沿法向连续，

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{H}_1+\vec{M}_1\right)=\vec{n}\cdot\left(\vec{H}_2+\vec{M}_2\right)$$

或者 $$\frac{\partial\phi_1}{\partial n}-\frac{\partial\phi_2}{\partial n}=\vec{n}\cdot\left(\vec{M}_1-\vec{M}_2\right)$$

——边界条件之二

若是非铁磁介质，则有 $\vec{B}=\mu\vec{H}$。因此，对由非铁磁介质构成的分界面，有

$$\mu_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n}$$

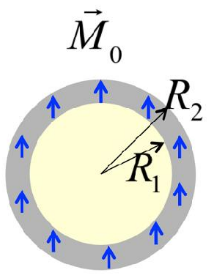
——边界条件之二

总结：引入磁标势和磁标势的方便之处在于：

- 可以借用静电学中的一些处理问题的方法；
- 在处理永久磁铁（无自由电流）、超导体（超导电流看成是磁化电流）所激发的磁场时，采用这种方法非常方便。

例题：均匀磁化永磁介质球壳，内、外半径为 R_1、R_2，磁化强度为 M_0。证明空腔内的磁场为 0。

解：这个问题是全空间问题，并且在全空间都不存在自由电流分布，因此在全空间都可以引入磁标势来描述磁场强度。



- 球壳内外磁标势都满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\phi_{in} = 0$$
$$\nabla^2\phi_{out} = 0$$

- 球壳本身，由于是均匀磁化，$\rho_m = -\mu_0\nabla\cdot\vec{M}=0$。因此，球壳层内的磁势同样满足拉普拉斯方程：

$$\nabla\phi_{shell}^2 = 0$$

在球坐标系中，三个区域电势的通解形式分别为：

$$\phi_{out} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

$$\phi_{shell} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n r^n + \frac{d_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

$$\phi_{in} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(f_n r^n + \frac{g_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

其中 a_n、b_n、c_n、d_n、f_n、g_n 是待定的系数。

考虑边界条件：在无穷远处 $\phi_{out}\big|_{r=\infty} = 0$；在球心处，磁势有限值 $\phi_{in}\big|_{r=0} = finite$，则：

$$\phi_{out} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

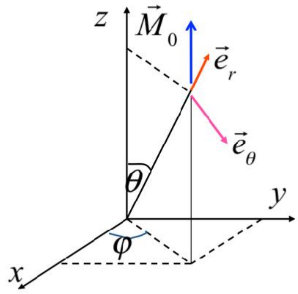
$$\phi_{shell}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n r^n+\frac{d_n}{r^{n+1}}\right)P_n\left(\cos\theta\right)$$

$$\phi_{in}=\sum_{n=0}^{\infty}f_n r^n P_n\left(\cos\theta\right)$$

利用磁标势的边值关系之一：

$$\phi_1=\phi_2$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_1-\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_2=\vec{n}\cdot\left(\vec{M}_1-\vec{M}_2\right)$$



在球坐标系中,球壳层中的磁化强度

M_0 矢量可以分解成：

$$\vec{M}=M_0\left(\cos\theta\vec{e}_r-\sin\theta\vec{e}_\theta\right)$$

对于球壳内表面，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n R_1^{\ n}+\frac{d_n}{R_1^{\ n+1}}\right)P_n\left(\cos\theta\right)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n R_1^{\ n}P_n\left(\cos\theta\right)$$

或者：

$$c_n R_1^{\ n}+\frac{d_n}{R_1^{\ n+1}}=f_n R_1^{\ n},\left(n\geq 0\right)$$

由 $\left.\frac{\partial\phi_{in}}{\partial r}\right|_{r=R_1}-\left.\frac{\partial\phi_{shell}}{\partial r}\right|_{r=R_1}=-M_0\cos\theta$，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}nf_n R_1^{n-1}P_n\left(\cos\theta\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\left(nc_n R_1^{n-1}-(n+1)\frac{d_n}{R_1^{n+2}}\right)P_n\left(\cos\theta\right)$$
$$=-M_0\cos\theta$$

比较系数得：

$$d_0 = 0$$

$$f_1 - \left(c_1 - \frac{2d_1}{R_1^3} \right) = -M_0$$

$$nf_n R_1^{n-1} = nc_n R_1^{n-1} - (n+1)\frac{d_n}{R_1^{n+2}}, (n \ge 2)$$

对于球壳外表面：

由 $\phi_{out}\big|_{r=R_2} = \phi_{shell}\big|_{r=R_2}$**，得到**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R_2^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n R_2^{\,n} + \frac{d_n}{R_2^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

得： $\dfrac{b_n}{R_2^{\,n+1}} = c_n R_2^{\,n} + \dfrac{d_n}{R_2^{\,n+1}}, (n \ge 0)$

由 $\left.\dfrac{\partial\phi_{out}}{\partial r}\right|_{r=R_2} - \left.\dfrac{\partial\phi_{shell}}{\partial r}\right|_{r=R_2} = -M_0\cos\theta$， 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} -(n+1)\frac{b_n}{R_2^{n+2}} P_n(\cos\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(nc_n R_2^{n-1} - (n+1)\frac{d_n}{R_2^{n+2}} \right) P_n(\cos\theta) = -M_0\cos\theta$$

比较系数得： $-\dfrac{b_0}{R_2^{\,2}} + \dfrac{d_0}{R_2^{\,2}} = 0$

$$-\frac{2b_1}{R_2^{\,3}} - \left(c_1 - \frac{2d_1}{R_2^{\,3}} \right) = -M_0$$

$$(n+1)\frac{b_n}{R_2^{\,n+2}} + nc_n R_2^{\,n-1} - (n+1)\frac{d_n}{R_2^{\,n+2}} = 0, (n \ge 2)$$

联立方程组求解：

$$d_0 = 0,$$

$$-\frac{b_0}{R_2^{\ 2}}+\frac{d_0}{R_2^{\ 2}}=0$$

$$f_1-\left(c_1-\frac{2d_1}{R_1^{\ 3}}\right)=-M_0\ nf_nR_1^{\ n-1}=nc_nR_1^{\ n-1}-(n+1)\frac{d_n}{R_1^{\ n+2}},(n\geq 2)$$

$$-\frac{2b_1}{R_2^{\ 3}}-\left(c_1-\frac{2d_1}{R_2^{\ 3}}\right)=-M_0$$

$$(n+1)\frac{b_n}{R_2^{\ n+2}}+nc_nR_2^{\ n-1}-(n+1)\frac{d_n}{R_2^{\ n+2}}=0,(n\geq 2)$$

$$\frac{b_n}{R_2^{\ n+1}}=c_nR_2^{\ n}+\frac{d_n}{R_2^{\ n+1}},(n\geq 0)$$

$$c_nR_1^n+\frac{d_n}{R_1^{n+1}}=f_nR_1^n,(n\geq 0)$$

解得：

$d_0=0,\ \ -\frac{b_0}{R_2^{\ 2}}+\frac{d_0}{R_2^{\ 2}}=0\quad \frac{b_0}{R_2}=c_0+\frac{d_0}{R_2},\qquad c_0+\frac{d_0}{R_1}=f_0$

这是关于 c_0,b_0,d_0,f_0 的方程组。

$$f_1-\left(c_1-\frac{2d_1}{R_1^{\ 3}}\right)=-M_0$$

$$-\frac{2b_1}{R_2^{\ 3}}-\left(c_1-\frac{2d_1}{R_2^{\ 3}}\right)=-M_0$$

$$\frac{b_1}{R_2^{\ 2}}=c_1R_2+\frac{d_1}{R_2^{\ 2}},\qquad c_1R_1+\frac{d_1}{R_1^{\ 2}}=f_1R_1$$

这是关于 c_1,b_1,d_1,f_1 的方程组。

$$nf_nR_1^{n-1}=nc_nR_1^{n-1}-(n+1)\frac{d_n}{R_1^{n+2}},(n\geq 2)$$

$$(n+1)\frac{b_n}{R_2^{\ n+2}}+nc_nR_2^{\ n-1}-(n+1)\frac{d_n}{R_2^{\ n+2}}=0,(n\geq 2)$$

$$\frac{b_n}{R_2^{\ n+1}}=c_nR_2^{\ n}+\frac{d_n}{R_2^{\ n+1}},(n\geq 2)$$

$$c_n R_1^{\ n} + \frac{d_n}{R_1^{\ n+1}} = f_n R_1^{\ n}, (n \ge 2)$$

这是关于 c_n,b_n,d_n,f_n 的方程组(n>=2)。

联立方程组，整个空间的磁势分布为

$$\phi_{in} = 0\ , \qquad (r < R_1)$$

$$\phi_{shell} = \frac{M_0}{3}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)\cos\theta, \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\phi_{out} = \frac{M_0}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}, \quad (r > R_2)$$

球壳的磁矩： $\vec{m} = \frac{4\pi}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\vec{M}_0$

球壳内的磁场：

$$\vec{H} = -\nabla\phi_m,$$

$$\vec{H}_{in} = 0,$$

$$\vec{B}_{in} = \mu_0 \vec{H}_{in} = 0$$