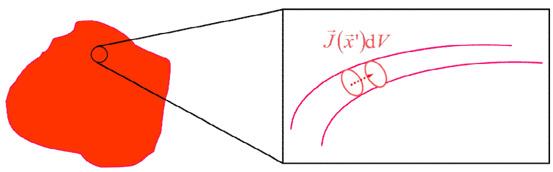
# § 3.3　磁多极矩

前面讨论的都是通过求解微分方程，来得到稳恒电流产生的磁场分布。

如果电流仅分布在一个有限的小区域内，并且所有电流密度分布都是已知，而感兴趣的是远离源区的磁场分布情况。在这样的情况下，则将磁场的矢势作多极展开而获得远场区矢势的近似表达式。

本节所讨论的问题：**小区域局部区域电流分布在远场区所产生的磁场**，主要内容包括：1）矢势的多极展开；2）载流线圈的磁矩、磁偶极子；3）小区域电流分布在外磁场中受到的力、力矩。

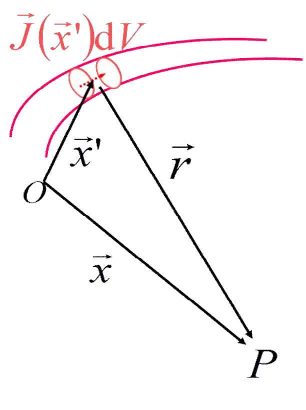
## 1. 矢势的多极展开




$$\nabla\cdot\vec{J}=0$$

在空间 P 处的矢势的解为

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'}{r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$




1）对于局部区域电流分布在远场区

取区域内某点 0 为坐标原点，由于 $|\vec{x}'|<<|\vec{x}|$，因此

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\frac{1}{|\vec{x}|}-\vec{x}_n'\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{x}|}+\frac{1}{2}\vec{x}_n'\vec{x}_n':\nabla\nabla\frac{1}{|\vec{x}|}+\cdots$$

此时，我们可以把矢$\vec{A}$作多极展开：

$$\begin{aligned}\vec{A}\ &=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}\left(\vec{x}\,'\right)\frac{1}{R}\mathrm{d}V\,'\\&-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}\left(\vec{x}\,'\right)\left(\vec{x}\,'\cdot\nabla\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V\,'\\&+\frac{\mu_0}{8\pi}\int_V \vec{J}\left(\vec{x}\,'\right)\left(\vec{x}\,'\vec{x}\,':\nabla\nabla\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V\,'\\&+\cdots\cdots\end{aligned}$$

从而把矢势$\vec{A}$写成

$$\vec{A}=\vec{A}^{(0)}+\vec{A}^{(1)}+\vec{A}^{(2)}+\cdots\cdots$$

其中

$$\vec{A}^{(0)}\ =\frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V \vec{J}\left(\vec{x}\,'\right)\mathrm{d}V\,'$$

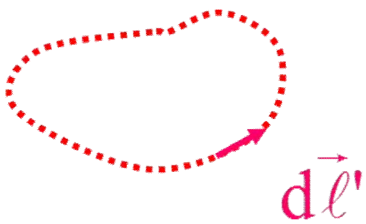
$$\vec{A}^{(1)}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}\left(\vec{x}\,'\right)\left(\nabla\frac{1}{R}\cdot\vec{x}\,'\right)\mathrm{d}V\,'$$

$$\vec{A}^{(2)}\ =\frac{\mu_0}{8\pi}\int_V \vec{J}\left(\vec{x}\,'\right)\left(\vec{x}\,'\vec{x}\,':\nabla\nabla\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V\,'$$

展开式中的第一项：

$$\vec{A}^{(0)}\ =\frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V \vec{J}\left(\vec{x}\,'\right)\mathrm{d}V\,'$$

根据稳恒电流（连续性），电流分布总可以分成若干条闭合的电流管；对每一支电流管而言，




$$\vec{J}\left(\vec{x}\,'\right)\mathrm{d}V\,'\rightarrow I\mathrm{d}\vec{\ell}\,'$$

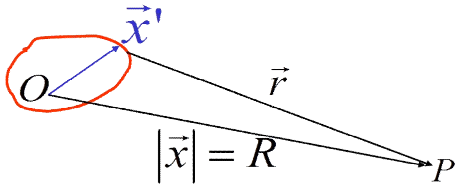
$$I\oint_L \mathrm{d}\vec{\ell}\,'=0$$

$$\vec{A}^{(0)}=\frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V \vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'=0$$

➢ 结论：展开式中不存在与点电荷相对应的磁单极项。

➢ 对比：小区域电荷体系的电势的零级项：$\phi^{(0)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$

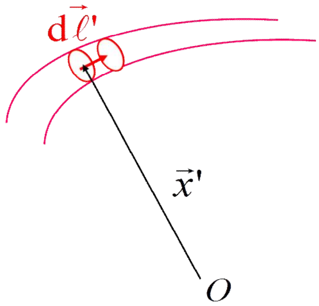
展开式中的第二项：




$$\vec{A}^{(1)}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}(\vec{x}')\left(\nabla\frac{1}{R}\cdot\vec{x}'\right)\mathrm{d}V'$$

可以证明上式可以改写成

$$\vec{A}^{(1)}=\vec{m}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\int_V \vec{x}'\times\vec{J}\,\mathrm{d}V'\right]\times\frac{\vec{R}}{R^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$$




其中，$\vec{m}=\frac{1}{2}\oint\vec{x}'\times\vec{J}\,\mathrm{d}V'$为电流线圈的磁矩。

证明如下：对于稳恒电流

$$\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'\to I\mathrm{d}\vec{\ell}'$$

$$\vec{A}^{(1)}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}(\vec{x}')\left(\nabla\frac{1}{R}\cdot\vec{x}'\right)\mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\oint\frac{1}{2}\left[(\vec{R}\cdot\vec{x}')\,\mathrm{d}\vec{\ell}'+(\mathrm{d}\vec{\ell}'\cdot\vec{R})\,\vec{x}'\right]$$

$$+\frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\oint\frac{1}{2}\left[(\vec{R}\cdot\vec{x}')\,\mathrm{d}\vec{\ell}'-(\mathrm{d}\vec{\ell}'\cdot\vec{R})\,\vec{x}'\right]$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\oint(\vec{R}\cdot\vec{x}')\,\mathrm{d}\vec{\ell}'$$

其中

$$(\vec{R}\cdot\vec{x}')\,\mathrm{d}\vec{\ell}'+(\mathrm{d}\vec{\ell}'\cdot\vec{R})\,\vec{x}'=\mathrm{d}\left[(\vec{R}\cdot\vec{x}')\,\vec{x}'\right]$$

全微分沿闭合回路的线积分为零，

$$\oint \mathrm{d}\left[\left(\vec{R}\cdot\vec{x}'\right)\vec{x}'\right]=0$$

因此，

$$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi R^3}\frac{I}{2}\oint\left[\left(\vec{R}\cdot\vec{x}'\right)\mathrm{d}\vec{\ell}'-\left(\mathrm{d}\vec{\ell}'\cdot\vec{R}\right)\vec{x}'\right]$$

最后$\vec{A}^{(1)}$的表达式可以写为

$$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi R^3}\frac{I}{2}\oint\left(\vec{x}'\times\mathrm{d}\vec{\ell}'\right)\times\vec{R}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi R^3}\frac{1}{2}\oint\left(\vec{x}'\times I\mathrm{d}\vec{\ell}'\right)\times\vec{R}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi R^3}\frac{1}{2}\oint\left(\vec{x}'\times\vec{J}\mathrm{d}V'\right)\times\vec{R}$$

$$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi R^3}\vec{m}\times\vec{R}$$

式中$\vec{m}=\frac{1}{2}\oint\left(\vec{x}'\times\vec{J}\right)\mathrm{d}V'$为稳恒电流线圈的磁矩。

展开式中的第三项：

$$\vec{A}^{(2)}=\frac{\mu_0}{8\pi}\int_V\vec{J}\left(\vec{x}'\right)\left(\vec{x}'\vec{x}':\nabla\nabla\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'$$

由于一般情况下$\vec{m}\neq 0,\vec{A}^{(1)}\neq 0$，矢势展开式中的$\vec{A}^{(2)}$或者更高阶的项在实际$\vec{A}$中的影响很小，可以忽略。因此结论是：

$$\vec{A}\approx\vec{A}^{(1)}$$

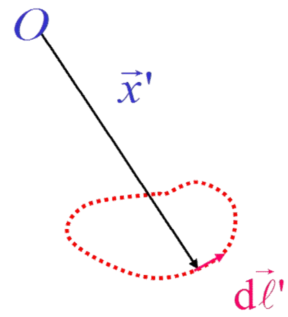
$$\vec{B}\approx\nabla\times\vec{A}^{(1)}$$

2. 载流线圈的磁矩

对于细导线载流线圈而言，

$$\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V' \to I\mathrm{d}\vec{\ell}'$$

$$\vec{m} = \frac{I}{2}\oint \vec{x}' \times \mathrm{d}\vec{\ell}' = I\vec{S}$$




$\vec{S} = \frac{1}{2}\oint \vec{x}' \times \mathrm{d}\vec{\ell}'$为线圈所包围的面矢量

稳恒载流线圈的磁矩$\vec{m} = I\vec{S}$特点是：

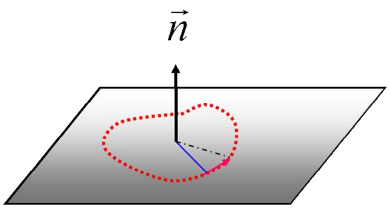
- 磁矩与坐标原点的位置无关；
- 对于平面上任意形状的载流线圈，

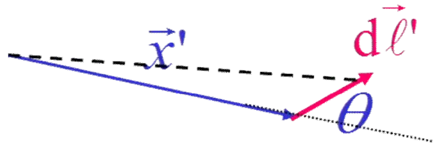
$$\vec{S} = \frac{1}{2}\oint \vec{x}' \times \mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{n}\frac{1}{2}\oint x'\mathrm{d}\ell \sin\theta = \Delta S\vec{n}$$

因此对于平面线圈而言，磁矩

$$\vec{m} = I\Delta S\vec{n}，$$

其中ΔS 为线圈的面积。




2、小载流线圈在远场的产生的磁场（只考虑到矢势的一级展开）

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{R}}{R^3}\right)$$

利用关系式：$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f} + (\nabla\cdot\vec{g})\vec{f} - (\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g} - (\nabla\cdot\vec{f})\vec{g}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\left(\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\right)\vec{m} - (\vec{m}\cdot\nabla)\frac{\vec{R}}{R^3}\right]$$

利用 $\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}=-\nabla\cdot\left(\nabla\frac{1}{R}\right)=-\nabla^2\frac{1}{R}=0,\quad\left(R\neq 0\right)$，得

$$\vec{B}^{(1)}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\vec{m}\cdot\nabla\right)\frac{\vec{R}}{R^3}$$

利用公式：$\nabla\left(\vec{f}\cdot\vec{g}\right)=\left(\vec{f}\cdot\nabla\right)\vec{g}+\left(\vec{g}\cdot\nabla\right)\vec{f}\ +\vec{f}\times\left(\nabla\times\vec{g}\right)+\vec{g}\times\left(\nabla\times\vec{f}\right)$

$$\nabla\left(\vec{m}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\right)=\vec{m}\times\left(\nabla\times\frac{\vec{R}}{R^3}\right)+\left(\vec{m}\cdot\nabla\right)\frac{\vec{R}}{R^3}=\left(\vec{m}\cdot\nabla\right)\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{B}=-\mu_0\nabla\left(\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{4\pi R^3}\right)$$

$$\vec{B}=\mu_0\vec{H},$$
$$\vec{H}=-\nabla\phi_m$$

$$\vec{B}=-\mu_0\nabla\phi_m^{(1)}$$

其中定义 $\phi_m^{(1)}=\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{4\pi R^3}$ 为磁矩 $\vec{m}$ 在远场区所产生的磁势。

注意：电偶极子 $\vec{p}$ 的电势 $\phi_e^{(1)}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$。也正是根据这一点，我们把一个载流线圈比作磁偶极子，而前面所定义的磁矩也称为磁偶极矩。

### 3. 小区域电流分布在外磁场中受到的力和力矩

先注意两个公式：设 $\vec{f}=\vec{f}\left(\vec{x}\right)$，$\vec{g}=\vec{g}\left(\vec{x}\right)$

$$\nabla\left(\vec{f}\cdot\vec{g}\right)$$
$$=\left(\vec{f}\cdot\nabla\right)\vec{g}+\left(\vec{g}\cdot\nabla\right)\vec{f}\ +\vec{f}\times\left(\nabla\times\vec{g}\right)+\vec{g}\times\left(\nabla\times\vec{f}\right)$$
$$\nabla\times\left(\vec{f}\times\vec{g}\right)$$
$$=\left(\vec{g}\cdot\nabla\right)\vec{f}+\left(\nabla\cdot\vec{g}\right)\vec{f}-\left(\vec{f}\cdot\nabla\right)\vec{g}-\left(\nabla\cdot\vec{f}\right)\vec{g}$$

当其中一个矢量是常矢量，例如$\vec{f}(\vec{x})=\vec{m}$，上面的公式简化为

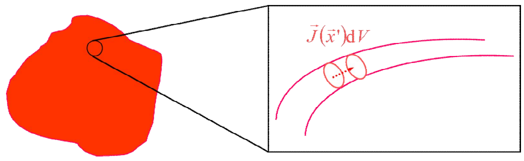
$$\nabla(\vec{m}\cdot\vec{g})=(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{g}+\vec{m}\times(\nabla\times\vec{g})$$

$$\nabla\times(\vec{m}\times\vec{g})=\vec{m}(\nabla\cdot\vec{g})-(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{g}$$

1) 小区域电流分布在外磁场中受到的力

$$\vec{F}=\int\vec{J}(x')\times\vec{B}_e\ \mathrm{d}V'$$

由于电流分布的区域很小，因此可在区域内的任意一参考点（坐标原点），把近邻位置的磁场相对参考点的值展开




$$\vec{B}_e(\vec{x}')=\vec{B}_e(0)+(\vec{x}'\cdot\nabla)\vec{B}_e(0)+\cdots\cdots$$

因此小线圈受到的力也可以做多级展开：

$$\vec{F}=\int\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{B}_e(0)\ \mathrm{d}V'$$

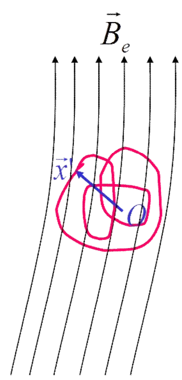
$$+\int\vec{J}(\vec{x}')\times\left[(\vec{x}'\cdot\nabla)\vec{B}_e(0)\right]\ \mathrm{d}V'$$

$$+\cdots\cdots$$

①第一项

$$\vec{F}^{(0)}=\int\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{B}_e(0)\ \mathrm{d}V'=0$$

**结论：均匀磁场对载有稳恒电流线圈的合力为零.**




②第二项：

$$\vec{F}^{(1)}=\int\vec{J}(\vec{x}')\times\left[(\vec{x}'\cdot\nabla)\vec{B}_e(0)\right]\ \mathrm{d}V'$$

$$\vec{F}^{(1)}=\nabla\left(\vec{m}\cdot\vec{B}_e(\vec{x})\right)\Big|_{\vec{x}=0}$$ （思考题）

因此稳恒载流小线圈受到的磁力公式：

$$\vec{F}=\nabla\left(\vec{m}\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\Big|_{\vec{x}=0}$$

$$\vec{F}=-\nabla U$$

定义：$U=-\vec{m}\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)$

式中，U 为磁偶极距在外磁场中的势函数。注意比较一下：电偶极子在外电场中的势函数（能量）$U=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e\left(\vec{x}\right)$。

磁偶极子在外场中受到的力矩为：

$$-L\cdot\Delta\theta=\Delta U$$

$$\begin{aligned}L&=-\frac{\partial U}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(mB_e\cos\theta\right)\\&=-mB_e\sin\theta\end{aligned}$$

考虑到力矩的方向，有

$$\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}_e$$

注意比较一下：电偶极子在外电场中受到的力矩为：$\vec{L}=\vec{p}\times\vec{E}_e$。

对比一下，有助于我们理解电、磁现象的某种对偶性：

| 电偶极子 | 磁偶极子（载流线圈） |
|---|---|
| $\vec{p}=\int_V \rho(\vec{x}')\vec{x}'\,\mathrm{d}V'$ | $\vec{m}=\frac{1}{2}\oint(\vec{x}'\times\vec{J})\mathrm{d}V'$ |
| $\varphi^{(0)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R},$ | 没有与点电荷相对应的磁单极项。 |
| $\phi^{(1)}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ | $\phi^{(1)}=\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{4\pi R^3}$ |
| $\vec{E}=-\nabla\varphi$ | $\vec{B}=\mu_0\vec{H}=-\mu_0\nabla\varphi$ |
| $U=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e$ | $U=-\vec{m}\cdot\vec{B}_e$ |
| $\vec{L}=\vec{p}\times\vec{E}_e$ | $\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}_e$ |

1）磁偶极子在外场中受到的力和力矩与电偶极子的相应公式是类似的，实际上反映了电和磁的某种对偶性。

2）这种对偶性不仅可以让我们更加深刻地理解电磁现象的本质，而且有可能从已知的电现象推断出未知的磁现象。

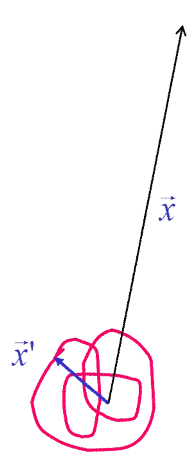
3）Faraday 就是从 Oersted 的电生磁的实验中得到启发，坚信磁也能生电，并最终成功地完成了有关的实验。

补充证明：$\vec{F}^{(1)}=\int\vec{J}(\vec{x}')\times\left[(\vec{x}'\cdot\nabla)\vec{B}_e(0)\right]\,\mathrm{d}V'=\nabla\left(\vec{m}\cdot\vec{B}_e(\vec{x})\right)\Big|_{\vec{x}=0}$

证明如下： 由于一般情况下，激发外磁场的电流元一般不处于 J(x) 所处的区域，因此

$$\nabla\times\vec{B}_e(0)=\nabla\times\vec{B}_e(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=0}=0$$

或者，$0=\vec{x}'\times\left\{\nabla\times\vec{B}_e(\vec{x})\right\}\Big|_{\vec{x}=0}$



$$=\left\{\nabla\left(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)-\left(\vec{x}'\cdot\nabla\right)\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right\}\Big|_{\vec{x}=0}$$

（$\nabla\left(\vec{f}\cdot\vec{g}\right)=\left(\vec{f}\cdot\nabla\right)\vec{g}+\left(\vec{g}\cdot\nabla\right)\vec{f}+\vec{f}\times\left(\nabla\times\vec{g}\right)+\vec{g}\times\left(\nabla\times\vec{f}\right)$）

从而得到：$\nabla\left(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\Big|_{\vec{x}=0}=\left(\vec{x}'\cdot\nabla\right)\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\Big|_{\vec{x}=0}$

因此我们把力表达式改写为

$$\vec{F}=\int\vec{J}\left(\vec{x}'\right)\times\left[\left(\vec{x}'\cdot\nabla\right)\vec{B}_e\left(0\right)\right]\,\mathrm{d}V'$$

$$=\int\vec{J}\left(\vec{x}'\right)\times\nabla\left(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\Big|_{\vec{x}=0}\,\mathrm{d}V'$$

类似的，结合电流线管的图像，

$$\vec{F}=I\oint\mathrm{d}\vec{\ell}'\times\nabla\left(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\Big|_{\vec{x}=0}$$

$$=-I\nabla\times\oint\mathrm{d}\vec{\ell}'\left(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\Big|_{\vec{x}=0}$$ （用$\nabla\times\left(\phi\vec{f}\right)=\left(\nabla\phi\right)\times\vec{f}+\phi\nabla\times\vec{f}$）

$$=-I\nabla\times\oint\frac{1}{2}\left[\mathrm{d}\vec{\ell}'\left(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\Big|_{\vec{x}=0}+\left(\mathrm{d}\vec{\ell}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\vec{x}'\Big|_{\vec{x}=0}\right]$$

$$-I\nabla\times\oint\frac{1}{2}\left[\mathrm{d}\vec{\ell}'\left(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\Big|_{\vec{x}=0}-\left(\mathrm{d}\vec{\ell}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\vec{x}'\Big|_{\vec{x}=0}\right]$$

$$\vec{F}=-I\nabla\times\oint\frac{1}{2}\left[\mathrm{d}\vec{\ell}'\left(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\Big|_{\vec{x}=0}+\left(\mathrm{d}\vec{\ell}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\vec{x}'\Big|_{\vec{x}=0}\right]$$

$$-I\nabla\times\oint\frac{1}{2}\left[\mathrm{d}\vec{\ell}'\left(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\Big|_{\vec{x}=0}-\left(\mathrm{d}\vec{\ell}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\vec{x}'\Big|_{\vec{x}=0}\right]$$

$$\oint\mathrm{d}\left[\left(\vec{x}'\cdot\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\right)\vec{x}'\right]=0$$

利用公式：$\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}-\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}=\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$$\vec{F}=\nabla\times\left(\vec{B}_e\left(\vec{x}\right)\times\frac{1}{2}\oint\vec{x}'\times I\,\mathrm{d}\vec{\ell}'\right)\Big|_{\vec{x}=0}$$

$$\vec{F} = \nabla\times\left(\vec{B}_e(\vec{x})\times\frac{1}{2}\oint\vec{x}'\times J(\vec{x}')\ \mathrm{d}V\right)\Big|_{\vec{x}=0}$$

$$\vec{F} = \nabla\times\left[\vec{B}_e(\vec{x})\times\vec{m}\right]\Big|_{\vec{x}=0}$$

根据

$$\nabla\times(\vec{f}\times\vec{g}) = (\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f} + (\nabla\cdot\vec{g})\vec{f} - (\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g} - (\nabla\cdot\vec{f})\vec{g}$$

$$\nabla\cdot B_e(\vec{x}) = 0$$

得

$$\vec{F} = (\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}_e(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=0}$$

根据

$$\nabla(\vec{f}\cdot\vec{g}) = \vec{f}\times(\nabla\times\vec{g}) + (\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g} + \vec{g}\times(\nabla\times\vec{f}) + (\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}$$

$$\nabla\times B_e(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=0} = 0$$

磁力的公式改写为

$$\vec{F} = \nabla\left(\vec{m}\cdot\vec{B}_e(\vec{x})\right)\Big|_{\vec{x}=0} = -\nabla U$$