§4 A-B (Aharonov-Bohm) 效应
——矢势的可观测效应

由于矢势不像电势那样可以通过测量电势差而直接观测，所以人们曾经误以为矢势仅仅是为数学方便而引入的非物理的矢量。

1959 年，阿哈勒诺夫（Y. Aharonov）和玻姆（D. Bohm）认为：在电子运动的空间，无论是否存在电磁场，电子波函数的位相都会受到空间中电磁势的影响。经过多年的研究，人们认识到矢势与体系的量子行为直接相关；AB 效应是量子效应。AB 效应在介观系统、超导量子干涉器和单电子晶体管等器件中到了广泛的应用。

本节的主要内容：

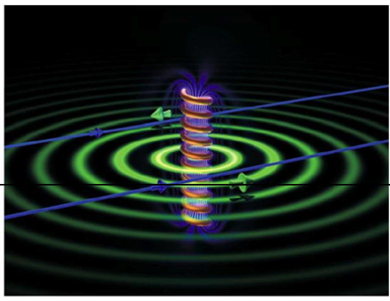
- 经典电动力学中的电磁势
- 量子力学中的电磁势
- A-B 效应
- 电子双峰干涉实验
- A-B 效应的定量解释——电子的正则动量

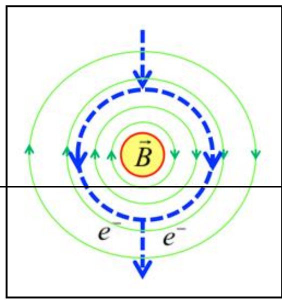
1、 经典电动力学中的电磁势

在经典力学中，带电粒子在外磁场中的动力学行为由洛伦兹力所决定，或者说由磁感应强度 B 决定.

磁场是无源场，所以总可以表示成矢势 A 的旋度 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ ；对于给定的磁场，用矢势 A 描述可以有无数种选择，即矢势存在规范自由度。

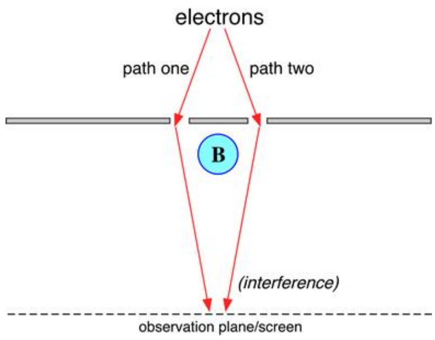
问题的提出：如图所示，中心区域有一无限长螺线管产生的均匀磁场。需要注意的是，尽管在黄色区域的外面不存在磁场，但在磁场区域内、外都存在矢势。在螺线管外，矢势与管轴心的距离满足：$A\propto\frac{1}{R}$ 。假设电子在磁场区域（螺线管）外运动。按照经典电动力学，电子的运动状态似乎不会受到磁场的影响，原因当电子在这个区域运动时并没有受到洛伦兹力的作用。60 年代，Aharonov 和 Bohm 从理论上提出，电子运动的波函数确实受到磁场（严格说，是线圈的磁通量）的影响。AB 效应告诉我们，尽管在经典力学的范畴内，是采用场来描述，还是采用势来描述，两者是等价的；然而描述一个带电粒子的量子效应，完全依靠力这一物理量来描述是不完整的，取而代之的应该是采用势！





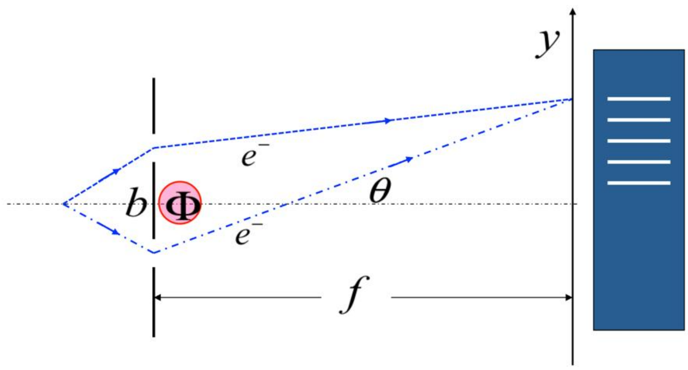
2、Aharonov-Bohm（A-B）效应

Aharonov-Bohm 提出，可以通过图示的电子干涉的实验的观测，来验证他们提出的理论是否正确：当螺线管通电之前，通过螺线管之外的两束相干电子（波）到达观测屏形成干涉条纹。当螺线管通电之后螺线管外的磁场仍然为零，但此时电子所走的路径上的矢势已经不再为零。如果观测屏上的电子干涉条纹在通电之后，发生了移动，就说明电子运动（的波函数）受到了矢势的影响！



3、电子双峰干涉实验——A-B 效应

通电前，管外：$\left(\vec{B}=0,\right)$ $\vec{A}=0$；通电后，管外：$\left(\vec{B}=0,\right)$ $\vec{A}\neq 0$。通电之后，螺线管外区域的矢势对电子产生了作用，使得两束电子之间产生了一个附加的相位差，从而使得观测屏上的干涉条纹的极值位置发生了移动。



对于一个无限长的螺线管，当通电之后，在电子经过的路径上磁感应强度 B 为零，但是磁矢势 A 却不为零。实验测得干涉条纹的移动值为：

$$\Delta y = \frac{e\Phi}{mv}\frac{f}{b}$$

式中，Φ 为螺线管内的磁通量 $\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_L \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$；$v$ 为电子的速度；b 为双缝间距；f 为透镜的焦距。

4、A-B 效应的定量解释

下面我们来定量解释条纹的移动与相关物理量的关系。

1）屏上干涉条纹强度的极小值的位置

在量子力学中，电子的状态用波函数描述；波函数的相位为：

$$\varphi = \int \vec{k}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$\vec{k}$ 为波矢 $(k = 2\pi/\lambda)$

当螺线管未通电流时，通过两条狭缝的电子到达屏上 y 处时，波函数的相位差为：

$$\varphi_1-\varphi_2=2\pi\frac{b\sin\theta}{\lambda}=kb\sin\theta$$

因此，如果两束电子波函数的相位差满足：

$$\varphi_1-\varphi_2=\left(2n+1\right)\pi$$

即：$\left(2n+1\right)\pi=kb\sin\theta$

则两束电子波在该处干涉相消。此时，屏上干涉条纹强度的极小值的位置：

$$y=f\tan\theta\approx f\sin\theta=\left(2n+1\right)\pi\left(\frac{f}{b}\right)\frac{1}{k}$$

2）电子的运动具有波动性；电子的物质波矢 k(德布罗意波）与其动量 p 之间的关系：

$$\hbar\vec{k}=\vec{p}$$

式中$\hbar=h/2\pi$, h为普朗克常数。

当螺线管未有电流之前，由于矢势为零，电子的动量仅有动力学动量

$$\vec{p}=m\vec{v}$$

则：$\vec{k}=\dfrac{m\vec{v}}{\hbar}$

因此，在螺线管通电之前，每一束电子在其运动路径上的波函数的相位变化

$$\varphi=\int\vec{k}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{\hbar}\int\vec{p}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int\frac{m\vec{v}}{\hbar}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

而两束电子经过不同的路径到达屏时，之间相位差可表示为

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{C_1}\frac{m\vec{v}}{\hbar}\cdot\mathrm{d}\vec{r}-\int_{C_2}\frac{m\vec{v}}{\hbar}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

当螺线管通电之后，电子在矢势$\vec{A}$的作用下，其总（正则）动量为（第六章第 7 节）

$$\begin{aligned}\vec{p}&=m\vec{v}+q\vec{A}\\&=m\vec{v}-e\vec{A}\end{aligned}$$

其中，$-e\vec{A}$为与电磁势有关的动量（电子的电量为 $-e$）

$$\hbar\vec{k}=\vec{p}=m\vec{v}-e\vec{A}$$

而当螺线管通电流、管外存在矢势时，两束电子到达屏时之间的相位差为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi&=\varphi_1-\varphi_2\\&=\left(\int_{C_1}\frac{m\vec{v}}{\hbar}\cdot\mathrm{d}\vec{r}-\int_{C_2}\frac{m\vec{v}}{\hbar}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\right)+\left(\int_{C_1}\frac{-e\vec{A}}{\hbar}\cdot\mathrm{d}\vec{r}-\int_{C_2}\frac{-e\vec{A}}{\hbar}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\right)\\&=kb\sin\theta+\frac{-e}{\hbar}\left(\int_{C_1}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}-\int_{C_2}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\right)\end{aligned}$$

其中

$$\int_{C_1}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}-\int_{C_2}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\oint\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

而

$$\oint A\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Phi$$

Φ 即为载流线圈的磁通量。

那么，两束电子到达屏上的相位差为

$$\Delta\varphi = kb\sin\theta - \frac{e}{\hbar}\Phi$$

如果这个位相差满足下面的条件：

$$kb\sin\theta - \frac{e}{\hbar}\Phi = \left(2n+1\right)\pi$$

即

$$kb\sin\theta = \left(2n+1\right)\pi + \frac{e}{\hbar}\Phi$$

则两束电子到达屏上干涉相消而形成干涉极小。

此时，屏上干涉条纹极小值的位置在

$$y' = f\tan\theta \approx f\sin\theta = \frac{\left(2n+1\right)\pi}{k}\frac{f}{b} + \frac{ef}{\hbar kb}\Phi$$

线圈通电前($\Phi = 0$)的干涉条纹极小值的位置：

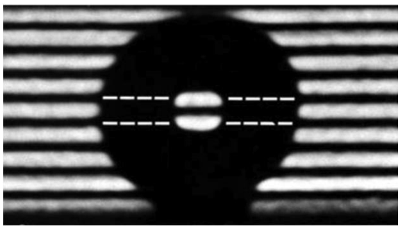
$$y = \frac{\left(2n+1\right)\pi}{k}\frac{f}{b}$$

两者相比，同一级干涉极小条纹的相对移动值为

$$\Delta y = y' - y = \frac{e\Phi}{\hbar k}\frac{f}{b} = \frac{e\Phi}{mv}\frac{f}{b}$$

5、观察 A—B 效应在实验上的挑战性

- A－B 实验要求，电子束中的电子具有良好的相干性，在分开之后仍然具有良好的相干性；
- 电子的波长很短，相干长度短，限制磁场的区域很小。如果采用螺线管,则半径不但必须很小，长度还要无限长，要尽可能减小螺线管外泄漏的磁场 B。
- 1960 年，AB 效应被 Chambers 实验证实。



实际上，比 Yakir Aharonov、David Bohm 两位科学家还早 10 年，早在 1949 年，Werner Ehrenberg 和 Raymond E. Siday 两位理论学家就预言了这一现象，只是当时 Yakir Aharonov and David Bohm 当时并不知道。早期存在一些争论：疑点 1：认为这一现象并不是一个纯量子效应，而可能是由于螺线管的离散场的贡献而引起的。疑点 2：可能是基于一个无限长的螺线管这样一个非实际物理情形的结果。最终，80 年代中期,日本物理学家 Tonomura 等用超导材料将磁场屏蔽以后，所证实的 AB 效应才被物理界普遍接受。

刚才的现象是区域内无磁场，但存在矢势，所以对带电粒子的波函数的位相产生了影响，从而出现所谓的 A-B 效应,这是磁效应。大家可能去大胆的想一想，

如果在某个区域不存在电场，但存在电势，当带电粒子运动经过这个区域时，其波函数的位相如果也能够产生变化，那就应该能够产生类似的效应，确实是！这就是所谓的电效应。我们来简单说一下，根据薛定谔方程，如果粒子的能量为 E，则粒子的波函数的位相为

$$\exp(-iEt/\hbar)$$

但是带电粒子的能量依赖于电势 V，特别是在一个等势的区域（该区域的电场为零！），粒子的势能多出一项：qV，使得粒子的位相产生相移动：

$$\Delta\varphi = -\frac{qVt}{\hbar}$$

^ Aharonov, Y; Bohm, D (1959). "Significance of electromagnetic potentials in quantum theory". *Physical Review* **115**: 485–491.

^ Chambers, R.G. (1960). "Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux". *Physical Review Letters* **5**: 3–5

^ Ehrenberg, W; Siday, RE (1949). "The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics". *Proceedings of the Physical Society*. Series B **62**: 8–21.

^ Akira Tonomura, Nobuyuki Osakabe, Tsuyoshi Matsuda, Takeshi Kawasaki, and Junji Endo, "Evidence for Aharonov-Bohm Effect with Magnetic Field Completely Shielded from Electron wave", *Phys. Rev. Lett.* vol. 56, pp. 792–795 (1986).

^ van Oudenaarden, A; Devoret, Michel H.; Nazarov, Yu. V.; Mooij, J. E. (1998). "Magneto-electric Aharonov–Bohm effect in metal rings". *Nature* **391** (6669): 768.

^
Jump up to:
a *b* Batelaan, A. & Tonomura, A. (Sept. 2009). "The Aharonov–Bohm effects: Variations on a Subtle Theme". *Physics Today* **62** (9): 38–43.