

## 几个注意事项：

- 1) 课本：郭硕鸿第三版
- 2) 参考书：
  - a) **Griffith** 电动力学导论  
(**Introduction to Electrodynamics**)
  - b) 俎栋林，电动力学，清华大学出版社
- 3) 作业：每周一递交作业本

# 引言

电磁场是物质世界的重要组成部分之一。经典电动力学是依靠 Franklin(富兰克林, 1706)、Coulomb(库仑)、Ampere(安培)、Faraday(法拉第)、Maxwell(麦克斯韦)、Einstein(爱因斯坦)、Lorentz(洛伦兹)等建立的, 前后历经 100 年时间。经典电动力学主要内容包括电磁场的基本属性、运动规律, 以及其与带电物质之间的相互作用。

1785 年, 库仑定律 (库仑)

1813 年, 电通量、高斯定理、静电势的泊松方程

1820 年, 电流的磁效应 (奥斯特)

1820 年, 电流元之间的相互作用 (安培、毕奥、萨伐尔)

1831 年, 电场、磁场、电磁感应定律 (法拉第)

1861 年, 涡旋电场和位移电流假说

1865 年, 电磁场的动力学理论 (麦克斯韦), 预言电磁波的存在, 提出光的电磁理论

1888 年, 实验证实电磁波 (赫兹)

1898 年, 运动电荷的推迟势、加速运动电荷的辐射 (勒纳德)

1905 年, 诺贝尔奖 (勒纳德和赫兹)

1900 年, 麦克斯韦电磁理论 (电学、磁学、光学统一的理论)

## ——经典电磁理论

麦克斯韦方程组（1865）只有在绝对静止的参照系（以太）才成立，不满足相对性原理

1887年，迈克尔逊-莫雷实验：地球相对于以太的速度为零；

1892年，洛仑兹收缩假设

1904年，洛仑兹变换

1905年，爱因斯坦的狭义相对论（时间与空间的统一）

麦克斯韦建立的经典电动力学理论存在局限性，只有在绝对静止的参照系（以太）才成立，不满足相对性原理。1905年，爱因斯坦提出了基于新时空观的、适用与任何惯性参照系的理论——狭义相对论。

电磁现象和电磁力理论的完整性成为物理学家对物理学研究所追求的一种范式，甚至成为对其它力研究所追求的一种理想模型。

本章采用的是从静电场、静磁场的基本规律出发，然后对其中的部分定律做推广，并借助相关的假设，给出随时间变化的电磁场运动规律的完整定律。这些理论的准确性都是通过后来大量的实验得到检验与证明。

# 第一章 电磁现象的普遍规律

## §1 电荷和电场

在本节是从关于静止电荷之间的库仑相互作用力出发，给出静止的电荷所激发的静电场的场强表达式，然后分析静电场的散度和旋度性质，包括其积分和微分的形式。最后，我们对静电场

### 1. 库仑定律

真空中静止（相对于观察者）的点电荷 $Q_2$ 对另一静止点电荷 $Q_1$ 的作用力 $\vec{F}_{12}$ 为：

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

式中， $Q_1$ 、 $Q_2$ 为电荷的电量，单位为库仑；矢径 $\vec{r}_{12}$ 为从 $Q_2$ 指向 $Q_1$ 的矢径（2指向1）； $\vec{F}_{12}$ 的方向与 $\vec{r}_{12}$ 的方向之间的关系取决于 $Q_1 Q_2$ 的符号。 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$ 为真空的介电常数（电容率）。

库仑定律是从实验事实总结出来的数学表达式，其主要的特征是：满足牛顿第三定律，是向心力，具有与距离平方反比的依赖关系。



库仑力遵守平方反比定律意义重大，它是静电场高斯定理的基础。如果偏离平方反比定律的后果：光子的静质量不为零；规范不变性不再成立；电荷守恒定律将被破坏；静电平衡时导体上的电荷不再全部分布在导体的表面；电磁波在真空中传播时会发生色散等等。近代物理实验证实  $F \propto 1/r^{2+\alpha}$ ， $\alpha < 10^{-15}$ 。参见 *E. R. Williams et al., Phys. Rev. Lett. 26 (1971) 721.*

## 2. 电场

### 1) 点电荷电场及其强度

从库仑定律我们可以看出， $q$  受到的力正比于其电量。为此我们定义一个新的物理量：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

这个量（矢量）与  $q$  无关，但与  $q$  所处（与  $Q$  相对）位置、 $Q$  的数值有关，因此它描述了电荷  $Q$  在  $\vec{r}$  处产生的某种效应，称之为电场。

库仑定律只提出现象的数学定量描述，并未给出现象的物理本质。我们如果从“场”的观点来认识库仑定律，就是在电荷周围空间客观存在一种物质——电场；处于电场中的电荷会受到电场力的作用。

其次，电场力是通过有限的速度（光速）传递的。在静电场中，由于电荷的电量是不随时间变化的，容易让我们误认为这里的力是一种超距作用。在后面的章节中，当我们讨论随时间变化的电磁场时，我们就能够更清楚的认识到场和别的物质一样具有有限传播速度，并且具有动量、能量、角动量等。

## 2) 电场的叠加原理：

电场强度服从线性叠加原理。

若空间存在多个点电荷，则空间某一点  $P$  处的电场强度为：

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \vec{r}_i$$

对于电荷体块分布情况：

$$\vec{E} = \int_{V'} \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \rho(\vec{x}') dV'$$

公式中， $\vec{x}'$  为电量元  $\rho(\vec{x}')dV'$  的位置矢量（位矢）， $\rho(\vec{x}')$  为该处的电荷体密度， $dV'$  为体积元；场点  $P$  位矢为  $\vec{x}$ ， $\vec{r}$  为从电量元指向场点  $P$  的相对矢量。

~~~~~  
以后我们约定，带撇的变量是表示与（电荷或电流等）源点的物理量，而不带撇的变量则用来表示场点的相关物理量。

对于电荷面分布或者线分布的情况：

$$\vec{E} = \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{x}') \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dS'$$

$$\vec{E} = \int_{l'} \frac{\lambda(\vec{x}') \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dl'$$

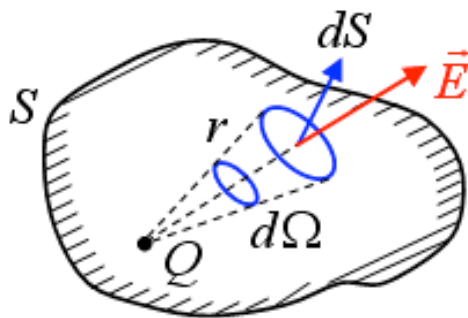
式中的  $\sigma(\vec{x}')$ 、 $\lambda(\vec{x}')$  分别表示源点  $\vec{x}'$  处的电荷面密度和线密度。

### 3. 高斯定理和电场的散度

#### 1) 电通量

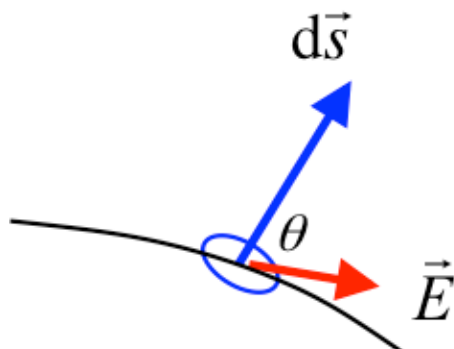
首先我们来考察电荷与其周围的电场的关系。如下图：考虑一个点电荷  $Q$  位于闭合曲面  $S$  内，点电荷产生的电场

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



定义电场通过面元  $d\vec{S}$  的电通量为

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS \cos\theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta dS$$



式中  $d\vec{S}$  为面元矢量, 大小等于面元的面积, 方向与面相垂直; 对于一个闭合的曲面而言, 面元的方向以指向闭合面外为正方向。

位于闭合面内的点电荷产生的电场对整个闭合曲面  $S$  的电通量

$$\begin{aligned}\Phi &= \int d\Phi \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\cos\theta dS}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

~~~~~  
立体角是以圆锥体的顶点为球心, 半径为 1 的球面被锥面所截得的面积来度量的, 度量单位称为“立体弧度”。和平面角的定义类似。在平面上我们定义一段弧微分  $S$  与其矢量半径  $r$  的比值为其对应的圆



心角记作  $d\theta=ds/r$ ; 所以整个圆周对应的圆心角就是  $2\pi$ ; 与此类似, 定义立体角为曲面上面积微元  $ds$  与其矢量半径的二次方的比值为此面微元对应的立体角记作  $d\Omega=ds/r^2$ ; 由此可得, 闭合球面的立体角都是  $4\pi$ 。

推论: 这里给出一个重要推论: 对于位于坐标原点的单位点电荷,

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}$$

或者

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = 4\pi$$

亦可证明: 如果点电荷处于闭合曲面  $S$  外, 则电场对该闭合曲面的电通量为零。

## 2) 高斯定理的积分形式

更一般的推广: 由空间中多个电荷激发的电场对于一闭合曲面的电通量为

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i$$

注意: 式中的电场是所有电荷的贡献; 在计算电场对闭合面的通量时只需处于  $S$  内的  $Q_i$  求和; 该电通量与处于  $S$  外的电

荷无关。

在电荷连续分布的情况下，高斯定理的形式为

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

此处的积分区间限于为闭合曲面  $S$  所包围的带电区域。这是高斯定理的积分形式。

### 3) 高斯定理的微分形式

根据矢量运算中我们学习到的知识，

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$

比较上面的两式得到

$$\int_V \left( \nabla \cdot \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho \right) dV = 0$$

此式对任意闭合曲面所包围的体积均成立，因此有

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x})$$

此为高斯定理的微分形式。高斯定理的微分形式指出了：

a) 空间某点的近邻区域电场的散度只与该点处的电荷密度有关，与其它地方的电荷分布无关。

b) 在  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  的地方只说明此处无电荷（电场线连续），但并不意味着此处  $\vec{E} = 0$ ；

c) 如果  $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$ ，说明电场分布在此位置出现了奇异（如电场线汇聚或者发散），此处存在电荷分布。

d) 由高斯定理的微分形式，可证明一个我们会经常用到的数学公式：

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}).$$

等式的右边中  $\delta(\vec{r})$  是一个特殊的函数，具有如下的性质：

$$\delta(\vec{r}) = 0(\vec{r} \neq 0)$$

$$\int_V \delta(\vec{r}) dV = 1$$

因此，从物理上看，这个函数描述的是一个位于坐标原点的单位点电荷的电荷密度函数：体积无穷小，而密度无穷大，电荷总量等于 1。

证明如下：首先由  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

易验证：
$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0(\vec{r} \neq 0)$$

其次，前面已经证明  $\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = 4\pi$ ，而

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = -\oint_S \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{S} = -\int_V \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} dV$$

$$= -\int_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV$$

因此，

$$\int_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV = -4\pi$$

总结一下：

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}).$$

---

这是一个非常有用的数学公式，一般性的数学证明比较复杂，这里我们借助高斯定理推导出，过程比较简单。

### 5) 高斯定理：电动力学的基本方程之一

高斯定理虽然是由仅适用于静电场的库仑定律和电场的叠加原理导出的，但实验证明高斯定理在普遍的情况也成立，是电动力学的基本方程之一：

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}, t)$$

## 3. 静电场的旋度

旋度反映的是矢量场的环流性质。

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{r}}{r^3} \rho(\vec{x}') dV'。$$

由于：

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3},$$

因此有

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{x}') \nabla \frac{1}{r} dV'$$

注意： $\nabla$  只对观测点位置  $\vec{x}$  作微商，则有

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_{V'} \rho(\vec{x}') \frac{1}{r} dV' \\ &= -\nabla \varphi(\vec{x}) \end{aligned}$$

式中：

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{x}')}{r} dV'$$

称为**标量势**。

由于对于**任意的标量场**都满足  $\nabla \times \nabla \varphi(\vec{x}) \equiv 0$ ，因此有

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) \equiv 0$$

基于静电场的高斯定理，得出如下的结论：

- a) 静电场是有源、无旋场；
- b) 由于这一特点，后面我们将会看到静电场沿着某一路径的线积分只与起、止点的位置的某种物理量有关，与具体的

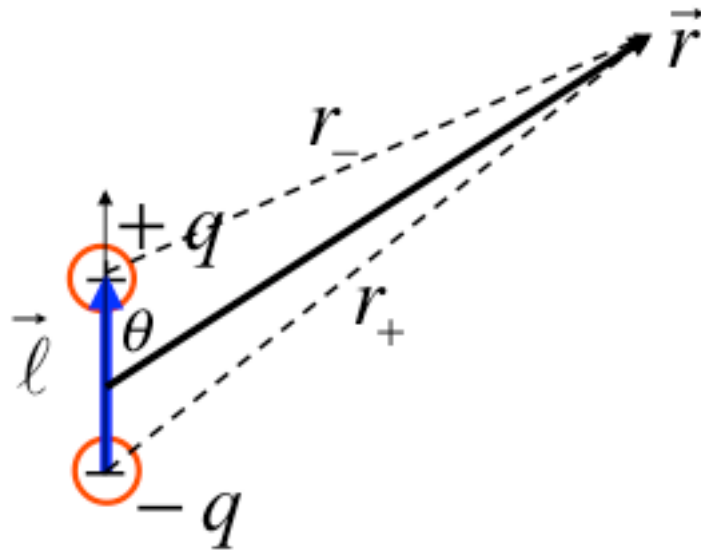
路径无关，所以静电场又称为保守场；

c) 这里得出的无旋性或者保守场特征的根本都是由于库仑定律中的距离平方反比依赖关系；

d) 在随时间瞬变的一般情况下，电场是有旋场，即

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t) \neq 0$$

**例题 1：** 纯电偶极子电场中任意一点的电势及电场。



电偶极子是等量异号 ( $+q, -q$ )、靠的很近的两个点电荷组成的带电体系。

类似点电荷模型，理想偶极子模型也是我们常用的物理模型之一，对于纯电偶极子，有  $q \rightarrow \infty$ ，而间距  $l \rightarrow 0$ ，而  $lq$  保持固定的值；

根据电势的叠加原理，远场处的电势

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$$
$$\varphi_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+}, \quad \varphi_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{r_-}$$

利用近似公式：

$$r_+ = r - \frac{\ell}{2} \cos\theta, \quad r_- = r + \frac{\ell}{2} \cos\theta,$$

得到

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ell \cos\theta}{r^2 - \left( \frac{\ell \cos\theta}{2} \right)^2} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\ell \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

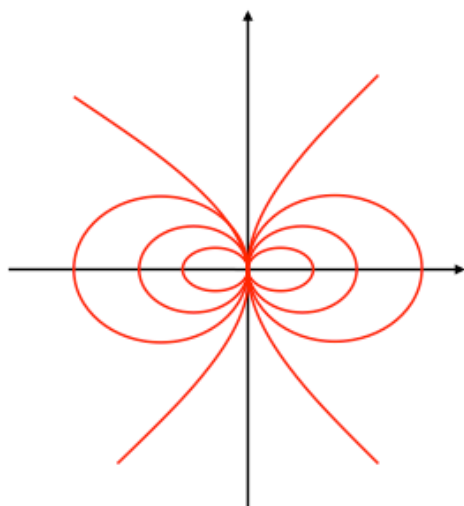
结论：

- a) 与点电荷的电势 ( $\varphi \propto r^{-1}$ ) 相比，电偶极子的电势不存在  $r^{-1}$  项，其随着距离的增加衰减更快 ( $\varphi \propto r^{-2}$ )；
- b) 根据上述电势的表达式，可以给出纯偶极子的电场的表达式 (本次作业：题 1)：

$$E = \nabla \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{r^3} \right]$$

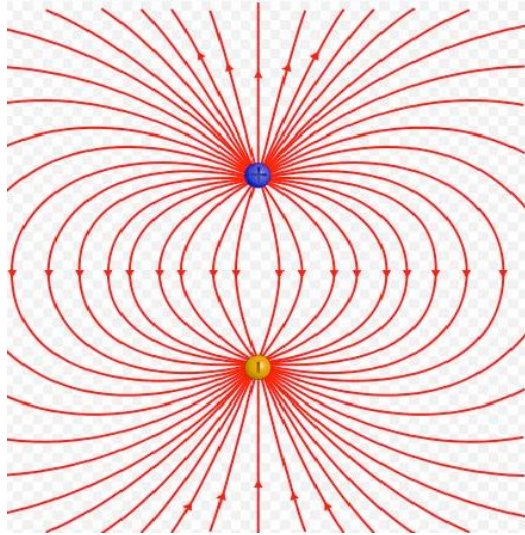
可以看出：比起一个点电荷的电场（ $E \propto r^{-2}$ ），纯电偶极子的电场随着距离的增加也是衰减的更快  $E \propto r^{-3}$ 。

下图是纯电偶极子的电场线分布：

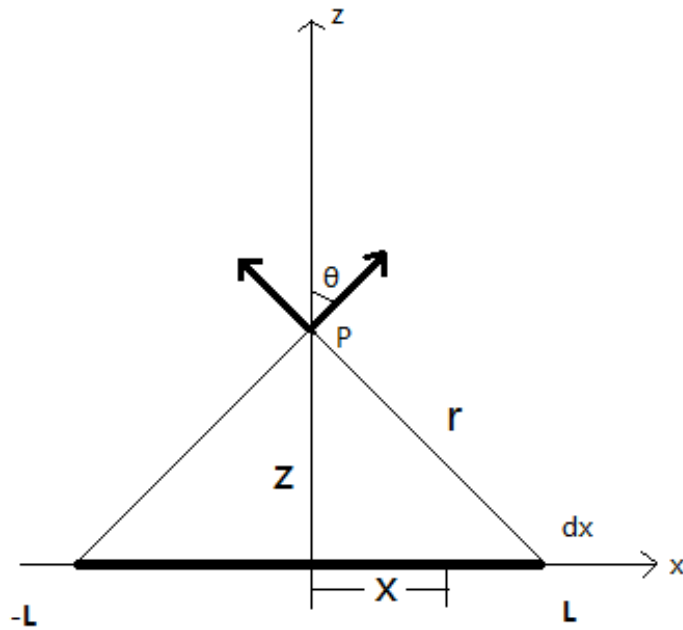


对于实际中的物理电偶极子，其电量和间距都是有限值。后面在电多极矩展开讨论部分我们会看到，一个物理电偶极子远场处的电势除了上面的  $r^{-2}$  的依赖项以外，还有更高阶的修正项。下图是物理电偶极子的电场线分布图。





**例题 2:** 长度为  $2L$ ，线电荷密度为  $\lambda$  的带电体，求其中垂线上的电场分布。



如图：  $\cos \theta = \frac{z}{r}$ ，  $r = \sqrt{z^2 + x^2}$

则电场强度 E 为：

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{2\lambda z}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$= \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x}{z^2 \sqrt{z^2 + x^2}} \right] \Big|_0^L$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z \sqrt{z^2 + L^2}}$$

分析：a) 对于远离带电体的点 ( $z \gg L$ ),

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z^2}$$

所以，对远处的场来说，带电体相当于一个点电荷。

b) 如果带电体无限长 ( $L \rightarrow \infty$ ), 我们有：

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{z}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{s}$$

其中 s 为到带电体的距离。

本次作业（第 2、3 题）：

郭硕鸿《电动力学》（第三版）P34 页，习题 5、6。