

§ 3 电磁波在导电介质中的传播

导电介质：

- 在电磁场的作用下，产生极化（用常规的正的介电常数描述）；
- 存在电导，会形成传导电流，从而产生焦耳热，使得电磁波的能量不断损耗；
- 这样的导电介质包括土壤、海水等，电磁波经过多个周期的传播之后，其振幅最终为零。

本节所要解决的问题:从电导率的观点出发,适用于低频波段

1. 导电介质内电荷分布的特点;
2. 电磁波在（良）导电介质内的传播;
3. 在良导电介质表面电磁波的折射
4. 在良导电介质表面电磁波的反射

以后补充:高频波段,则采用介质的观点来处理,用一个复介电常数来描述

1、导电介质内自由电荷分布

- 对于电磁场随时变化的电磁波，导电的介质内一般情况下是存在电荷分布的，取决于导电程度的优良；
- 导电程度的不同对自由电荷分布情况如何？

2) 导电介质内电荷密度非均匀涨落随时间的变化规律

$$\varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{——欧姆定律}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{——连续性方程}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0$$

$$\text{解: } \rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \begin{array}{l} t \approx \tau = \varepsilon / \sigma \\ \rho / \rho_0 = e^{-1} \end{array}$$

定义： $\tau = \varepsilon / \sigma$ 为电荷密度衰减的特征时间

如果导电介质为**良导电介质**（注意，这里我们不用导体，以示区别于我们熟悉的金属导体）：

$$\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1,$$

$$\frac{T}{\tau} \gg 1, \tau \ll T$$

即：电磁波的周期远大于电荷密度衰减的特征时间

$$\Rightarrow \rho(t) \Rightarrow 0$$

传导电流: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

位移电流: $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -i\omega \epsilon \vec{E} \quad (\vec{D} = \epsilon \vec{E})$

$$\frac{\text{传导电流}}{\text{位移电流}} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

1) 导电介质

(1) 欧姆定律: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

- Ohm定律给出: 传导电流在导电介质中会产生Joule热损耗。

- 需要注意的是, 欧姆定律的适用范围:

$$\omega \leq 10^{11} \text{ rad/s} \quad (f \leq 300 \text{ GHz})$$

此时, 电导率为实数, 导体内的位移电流可以忽略。

- 当频率超过 $\omega > 10^{11} \text{ rad/s}$, 导体内既有传导电流, 也有位移电流, 电导率是一个复数

$$\vec{J} = \sigma(\omega) \vec{E} = [\sigma_1(\omega) + i\sigma_2(\omega)] \vec{E}$$

(2) 导电介质分为良导电介质和非良导电介质：

(a) 良导电介质：

$$\frac{\text{传导电流}}{\text{位移电流}} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$$

(b) 非良导电介质：

$$\frac{\text{传导电流}}{\text{位移电流}} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$$

比如：土壤、海水。

(c) 工程应用上将介质划分如下

理想绝缘介质: $\sigma = 0$

低损耗介质: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < \frac{1}{100}$

损耗介质: $\frac{1}{100} < \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < 100$

良导电介质: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} > 100$

理想导电介质: $\sigma \rightarrow \infty$

2、电磁波在（良）导电介质内的传播

1) 良导电介质内电场所满足的方程:

$$\rho = 0, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

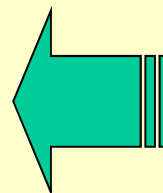
$$\nabla \times \vec{B} = \mu \sigma \vec{E} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

与自由空间情况下的唯一差别

电场所满足的方程：

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{E} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma \vec{E} + \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

考虑时谐（单色）波：

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

代入得到

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu \left(\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \omega^2 \vec{E} = 0$$

与自由空间情况下的差别

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu \left(\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \omega^2 \vec{E} = 0$$

定义复电容率：

$$\varepsilon' = \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega}$$

良导电介质中，电磁波电场分量所满足的方程

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu \varepsilon' \omega^2 \vec{E} = 0$$

(对于导电介质， ε' 为复介电常数)

对比：绝缘介质中，电磁波的电场满足的方程

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu \varepsilon \omega^2 \vec{E} = 0$$

对于没有任何损耗的绝缘介质， ε 为正的实数

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu \varepsilon' \omega^2 \vec{E} = 0$$

2) 定义复波矢: \vec{k}'

$$\vec{k}' \cdot \vec{k}' = k'^2 = \mu \varepsilon' \omega^2$$

良导电介质中, 电磁波的波动方程为

$$\nabla^2 \vec{E} + k'^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} + k'^2 \vec{E} = 0$$

3) 良导电介质中，时谐平面电磁波：

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

复波矢： $\vec{k}' = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$

式中 $\vec{\alpha}$ 、 $\vec{\beta}$ 均为实矢量。则

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{x}} e^{i(\vec{\beta} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

这表示，由于存在损耗，使得电磁波在传播时，其振幅是随着传播距离的增加而指数衰减！

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{x}} e^{i(\vec{\beta} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\begin{aligned}\vec{k}' \cdot \vec{k}' &= (\vec{\beta} + i\vec{\alpha}) \cdot (\vec{\beta} + i\vec{\alpha}) \\ &= \beta^2 - \alpha^2 + 2i\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \\ &= \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega\end{aligned}$$

$$\vec{k}' = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$$

$$\vec{k}' \cdot \vec{k}' = k'^2 = \mu\epsilon'\omega^2$$

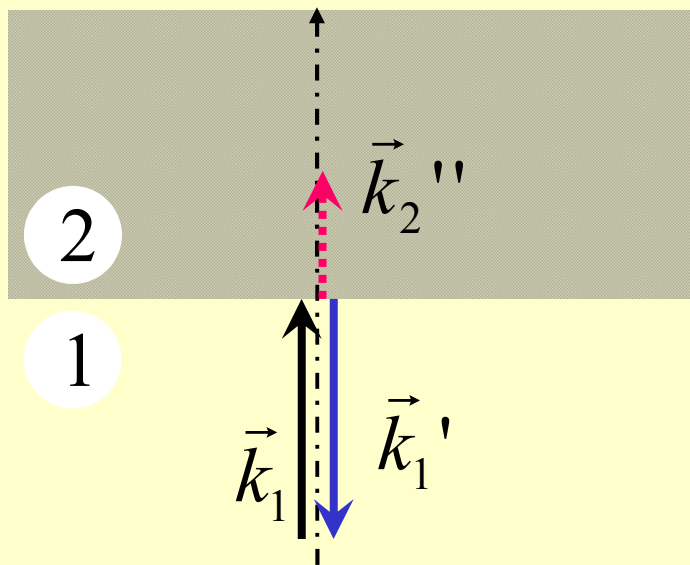
$$\epsilon' = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$$

比较得

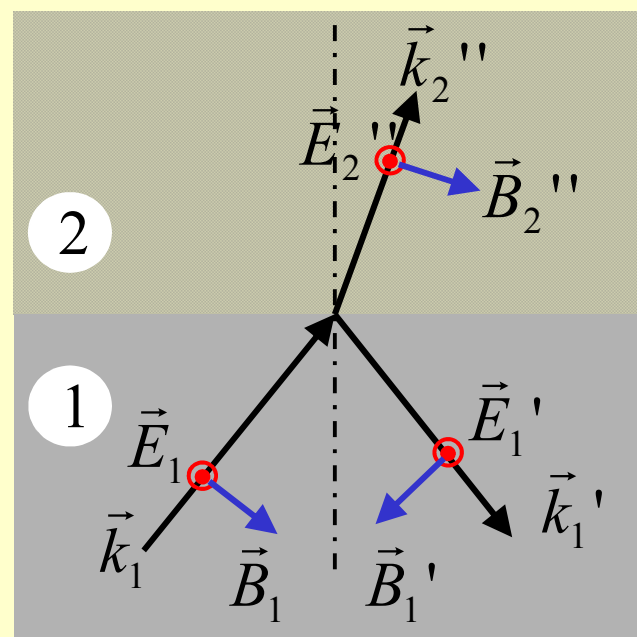
$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu\epsilon, \\ 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \omega\mu\sigma \end{cases}$$

3、电磁波入射到导电介质表面的折射

为简便起见，仅讨论垂直入射情况下



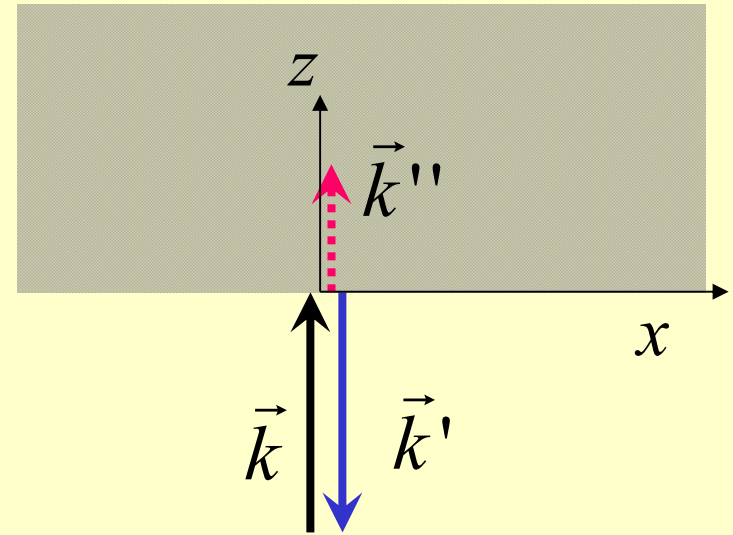
S 偏振



1) 假设垂直入射到导电介质表面

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \epsilon, \\ 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \omega \mu \sigma \end{cases}$$

$$\alpha_x = \beta_x = 0$$



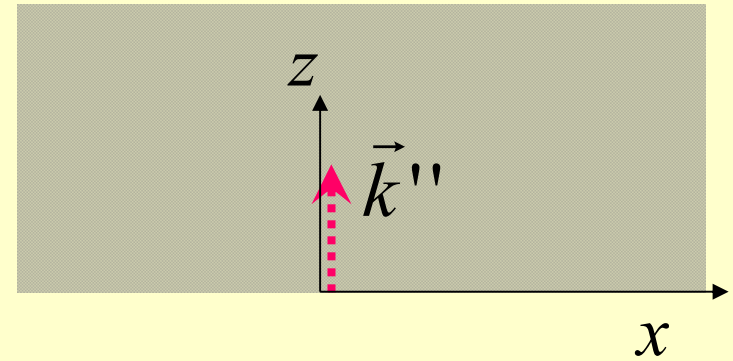
求解得出：

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right)^{1/2},$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right)^{1/2}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right)^{1/2}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right)^{1/2}$$



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\alpha \cdot \vec{x}} e^{i(\vec{\beta} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

↙

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0'' e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$$

电磁波在导电介质表面的穿透深度： $\delta = \frac{1}{\alpha}$

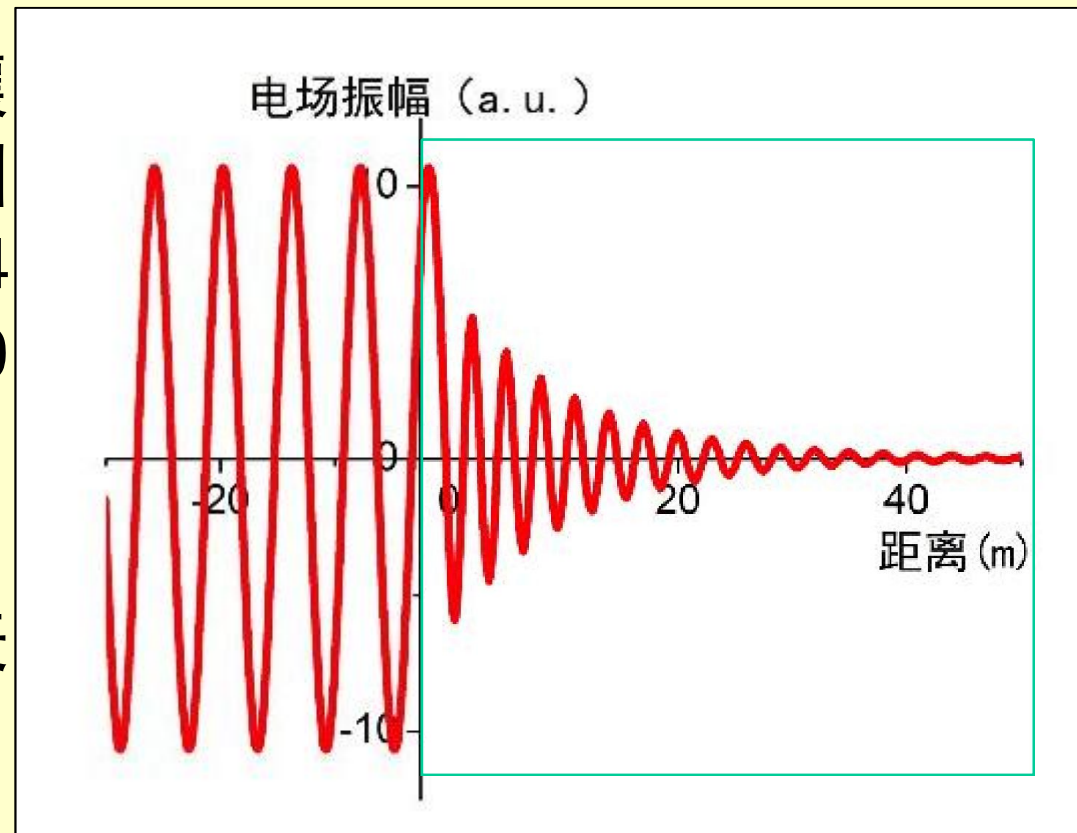
当低频电磁波入到到导电介质表面

$$\sigma(\omega) = \frac{Nf_0e^2}{m(\gamma_0 - i\omega)}$$

- 在低频区 ($\omega \ll \gamma$)，电导率可以看成实数；

- 例：对于干燥土壤，在兆赫兹波段相对介电常数 $\epsilon = 4$ ，电导率为 $\sigma = 10^{-4} \text{ s/m}$ ，

- 频率为50MHz的电磁波入射到土壤表面：



海水（设 $f = 50$ MHz）：

$$\varepsilon_r = 81, \mu_r = 1, \sigma = 4.4 \text{ s/m},$$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 829 \text{ m}^{-1},$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{829} \text{ m}$$

在海洋中采用无线通讯很困难。 潜艇在海底一般是采用超声波（声纳）通信，只是等浮出水面之后与基地联系才能发射无线电信号。

良导电介质 $(\sigma/\omega\varepsilon \gg 1)$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1 \right) \right]^{1/2} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}},$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} - 1 \right) \right]^{1/2} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

为电磁波在良导电介质表面的**穿透深度**

2) 电磁波入射到良导电介质表面，介质中的磁场的分布

磁场的位相比电场位相滞后 $\pi/4$

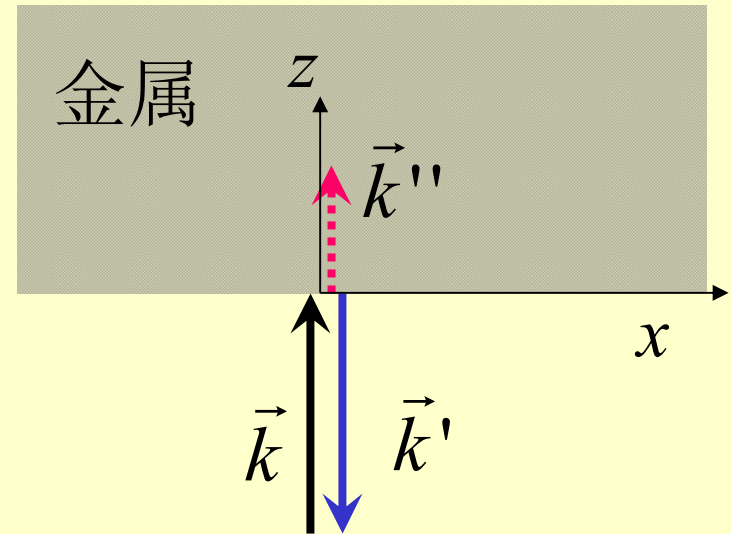
$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}$$

$$\vec{E}''(\vec{r}, t) = \vec{E}_0'' e^{i(k''z - \omega t)}$$

$$\vec{H}'' = \frac{1}{\omega\mu} \vec{k}'' \times \vec{E}''$$

$$= \frac{1}{\omega\mu} (\beta + i\alpha) \vec{e}_z \times \vec{E}'' = \frac{\beta}{\omega\mu} (1 + i) \vec{e}_z \times \vec{E}''$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{i\pi/4} \vec{e}_z \times \vec{E}''$$



$$\beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$w = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right)$$

良导电介质内：磁场能量密度与电场能量密度之比为

$$\frac{B''^2}{\mu \epsilon E''^2} = \frac{\mu H''^2}{\epsilon E''^2} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$$

$$\vec{H}'' = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \mu}} e^{i\pi/4} \vec{e}_z \times \vec{E}''$$

结论：当电磁波入射到良导电介质表面，内部电磁波能量主要是**磁能**。

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0'' e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$$

证明：平面波垂直入射到导电介质时，流入能量全部转化为Joule热。

解：功率损耗（Joule热）为单位时间内电磁场对带电体系所做的功

$$W = \vec{f} \cdot \vec{v} = \rho \vec{E}'' \cdot \vec{v} = \vec{J} \cdot \vec{E}'' = \sigma \vec{E}'' \cdot \vec{E}''$$

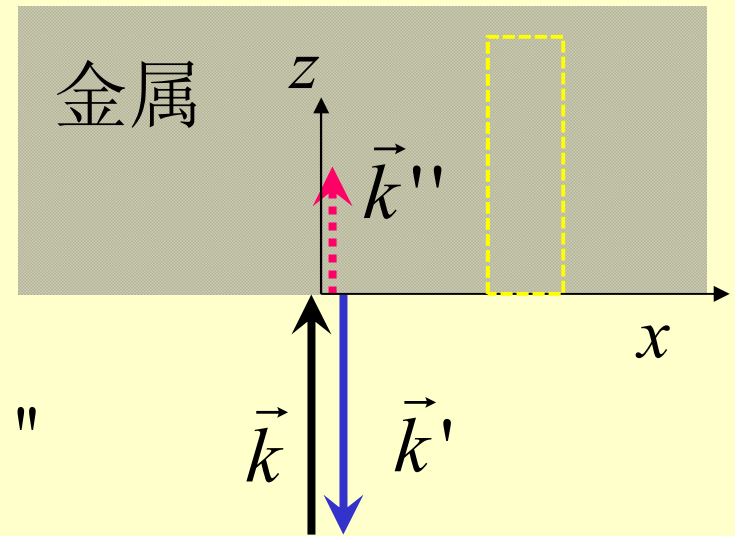
$$\langle W \rangle = \langle \sigma \vec{E}'' \cdot \vec{E}'' \rangle$$

$$= \langle \sigma \operatorname{Re}(\vec{E}'') \cdot \operatorname{Re}(\vec{E}'') \rangle = \frac{1}{2} \sigma (E_0'')^2 e^{-2\alpha z}$$



单位面积上消耗的能量为

$$P = \int_0^\infty \langle W \rangle dz = \frac{1}{2} \sigma (E_0'')^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \frac{1}{4\alpha} \sigma (E_0'')^2$$



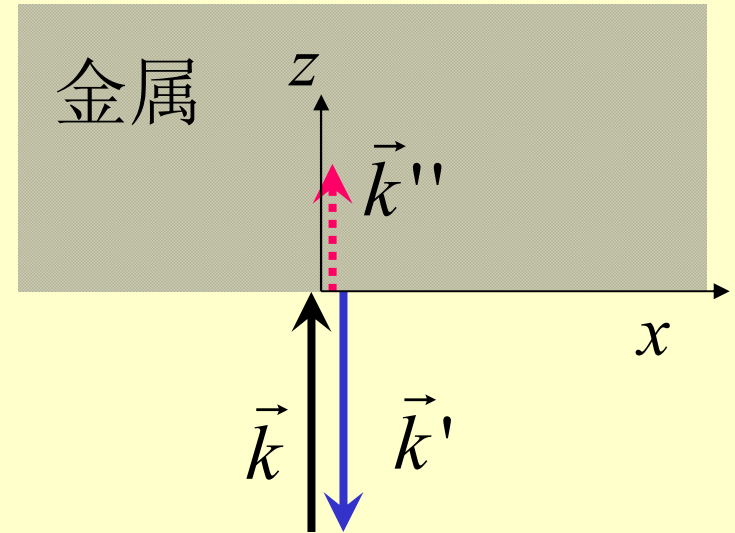
$$\begin{aligned}\vec{E}''(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0'' e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)} \\ &= E_0'' e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)} \vec{e}_y\end{aligned}$$

$$\vec{H}'' = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{i\pi/4} \vec{e}_z \times \vec{E}''$$

$$= -\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{i\pi/4} E_0'' \vec{e}_x = -\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} E_0'' e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t + \pi/4)} \vec{e}_x$$

$$\vec{S}'' = \vec{E}'' \times \vec{H}'' = \text{Re}(\vec{E}'') \times \text{Re}(\vec{H}'')$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} (E_0'')^2 e^{-2\alpha z} \cos(\beta z - \omega t) \cos(\beta z - \omega t + \pi/4) \vec{e}_z$$

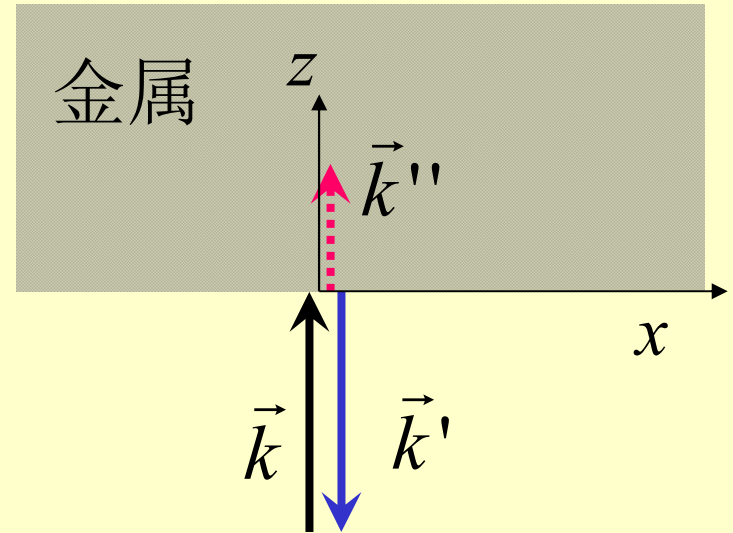


$$\vec{S}'' = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} (E_0'')^2 e^{-2\alpha z}$$

$$\bullet \cos(\beta z - \omega t) \cos(\beta z - \omega t + \pi/4) \vec{e}_z$$

$$\langle \vec{S}'' \rangle = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} (E_0'')^2 e^{-2\alpha z}$$

$$\bullet \langle \cos(k'' z - \omega t) \cos(k'' z - \omega t + \pi/4) \rangle \vec{e}_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} (E_0'')^2 e^{-2\alpha z} \vec{e}_z$$



$$\langle \cos(k'' z - \omega t) \cos(k'' z - \omega t + \pi/4) \rangle$$

$$= \cos(\pi/4) \langle \cos^2(k'' z - \omega t) \rangle - \sin(\pi/4) \langle \cos(k'' z - \omega t) \sin(k'' z - \omega t) \rangle$$

$$= 1/2$$

$$= 0$$

$$\langle \vec{S}'' \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} (E_0'')^2 e^{-2\alpha z} \vec{e}_z$$

电磁波垂直入射到良导电介质表面，流入能流为

$$\langle \vec{S}'' \rangle \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} (E_0'')^2 \vec{e}_z$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} \cdot \frac{2}{\omega\mu\sigma}} (E_0'')^2 \vec{e}_z$$

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$= \frac{\sigma}{4\alpha} (E_0'')^2 \vec{e}_z$$

- **思考题：**对于良导电介质，进入的能流与入射能流的比值如何？

4 导电介质表面对电磁波的反射

➤ 对于两个绝缘介质构成的分界面，由于界面上无传导电流、电荷的面分布，边界条件为；

$$\begin{array}{l} \vec{n}_{21} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \\ \vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{n}_{21} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{n}_{21} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_{21} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \\ \vec{n}_{21} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{n}_{21} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f \end{array} \right.$$

- 对于良导电的介质，在界面下**一定的穿透深度内**，存在传导电流的**体分布**；
- 从几何上讲，在这样的情况下，分界面上的面电流密度（厚度趋于0的层内的电流）可以认为是0；

$$\vec{\alpha}_f = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{n}_{21} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{n}_{21} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \end{array} \right.$$

1) 真空中磁场与电场关系:

$$H = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} E,$$

$$H' = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} E'.$$

$$\begin{cases} E + E' = E'' \\ H - H' = H'' \end{cases}$$

2) 垂直入射情况下, 良导电介质内磁场与电场关系

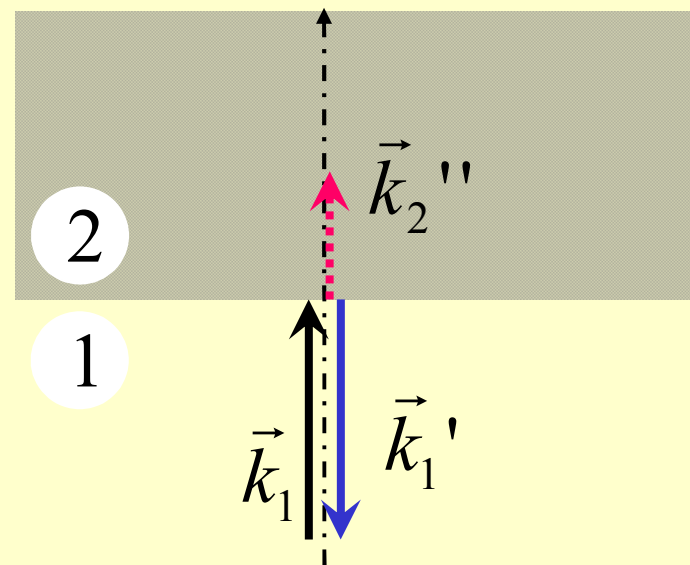
$$H'' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} (1+i) E''$$

$$\begin{cases} E + E' = E'', \\ E - E' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}} (1+i) E''. \end{cases}$$

这里已取 $\mu \approx \mu_0$ 。

- 垂直入射情况下, 反射波

$$\frac{E''}{E} = \frac{2}{2+i} \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon}{\sigma}},$$



- 垂直入射情况下, 流入导体的能流

$$\langle \vec{S} \rangle \Big|_{z=0} = \frac{\sigma}{4\alpha} (E_0'')^2 \vec{e}_z, \quad \frac{E''}{E} \rightarrow 0, \langle \vec{S} \rangle \Big|_{z=0} \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} E + E' = E'', \\ E - E' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1+i)E''. \end{cases}$$

联立求解得

$$\frac{E'}{E} = -\frac{1+i-\sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma}}{1+i+\sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma}}$$

3) 反射能流与入射能流密度之比（反射系数）为

$$R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 = \frac{\left(1 - \sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma}\right)^2 + 1}{\left(1 + \sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma}\right)^2 + 1}$$

对于良导体有 $\sigma/\omega\varepsilon_0 \gg 1$

$$R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 = \frac{\left(1 - \sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma}\right)^2 + 1}{\left(1 + \sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma}\right)^2 + 1}$$

$$R \approx \frac{1 - 2\sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma} + 1}{1 + 2\sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma} + 1}$$

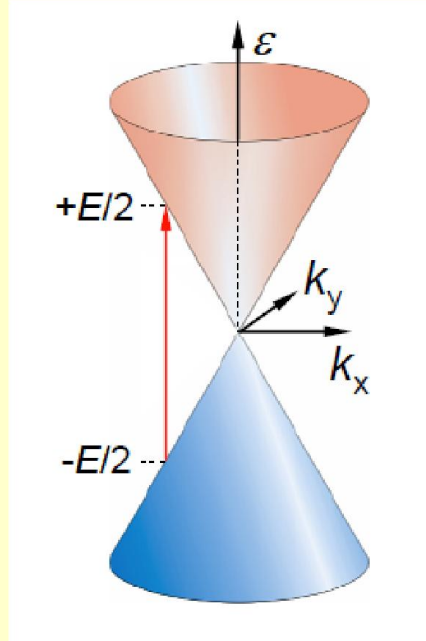
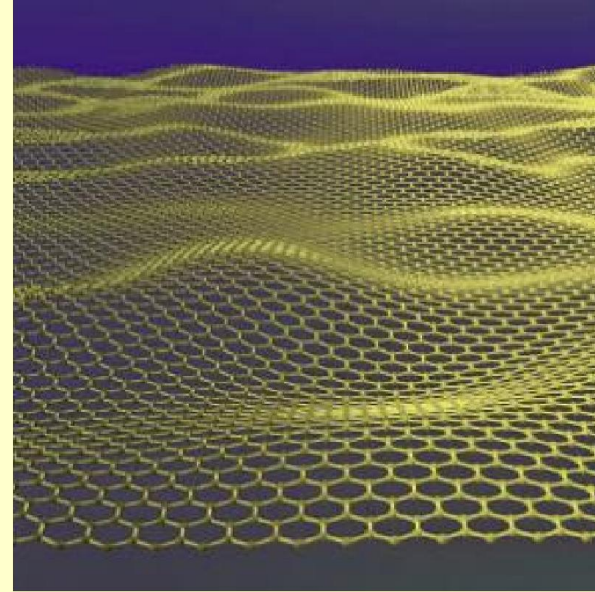
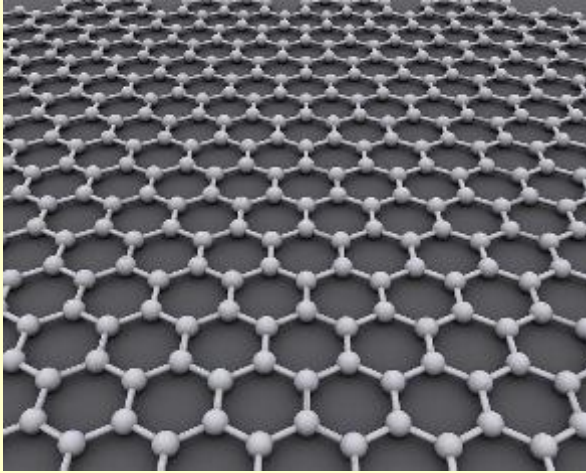
$$= \frac{1 - \sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma}}{1 + \sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma}}$$

$$\approx \left(1 - \sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma}\right)^2$$

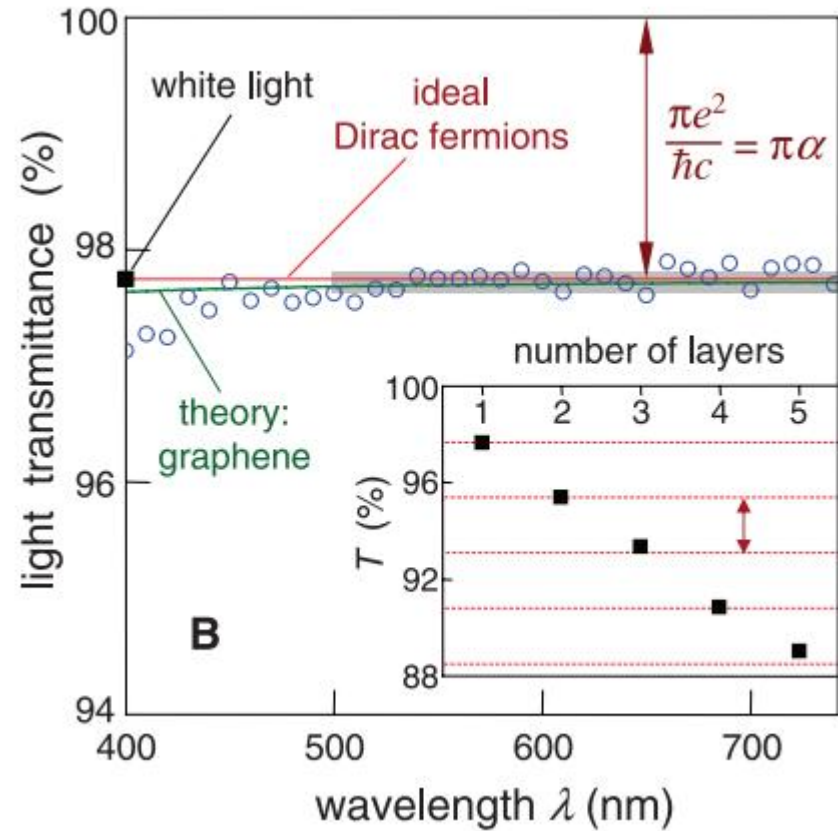
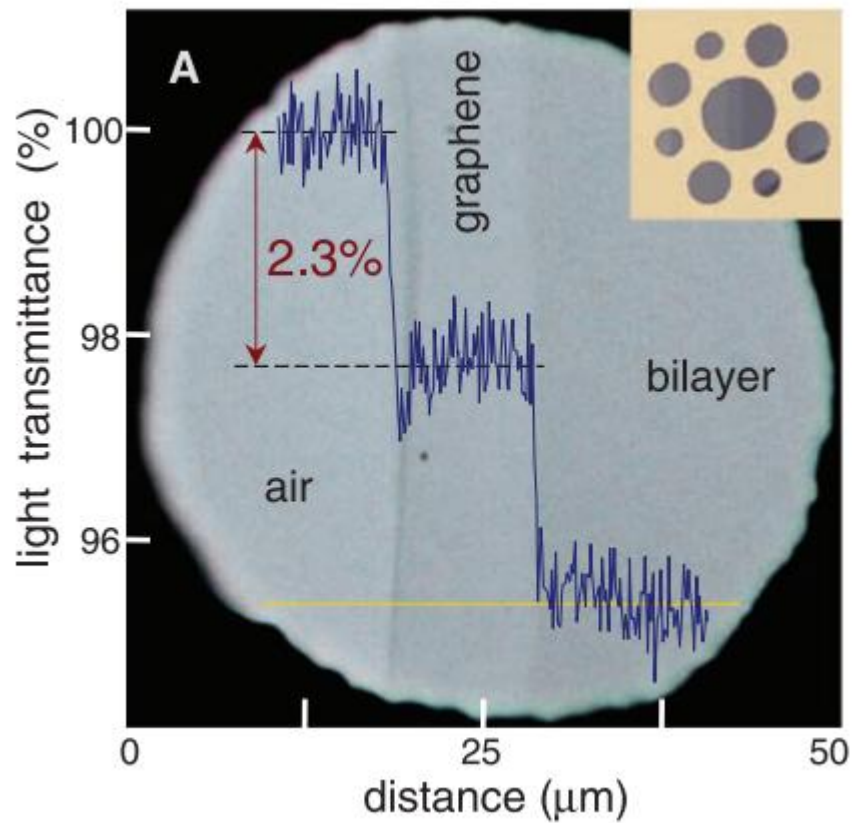
$$\approx 1 - 2\sqrt{2\omega\varepsilon_0/\sigma}$$

这表示，对于良导电介质，可以用作低频和微波的反射镜！

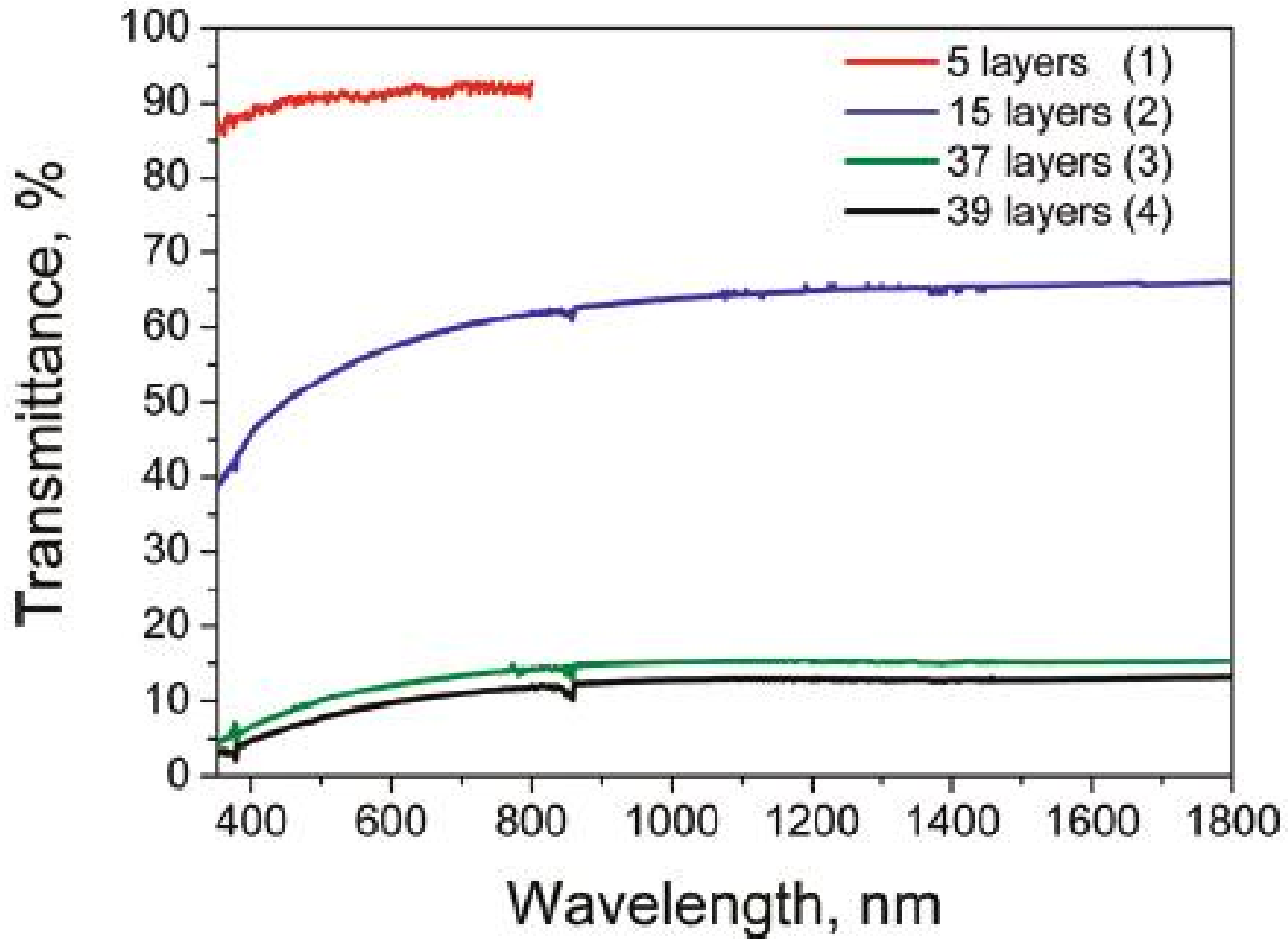
石墨烯



石墨烯的厚度在0.3nm左右，它是一种没有带隙的二维材料，价带和导带在费米面附件只有这么一个点相接处，我们把这个点称为Dirac点，当费米面处在Dirac点时，石墨烯可以吸收任意波长的光



6 JUNE 2008 VOL 320
SCIENCE, A. K. Geim et al.,



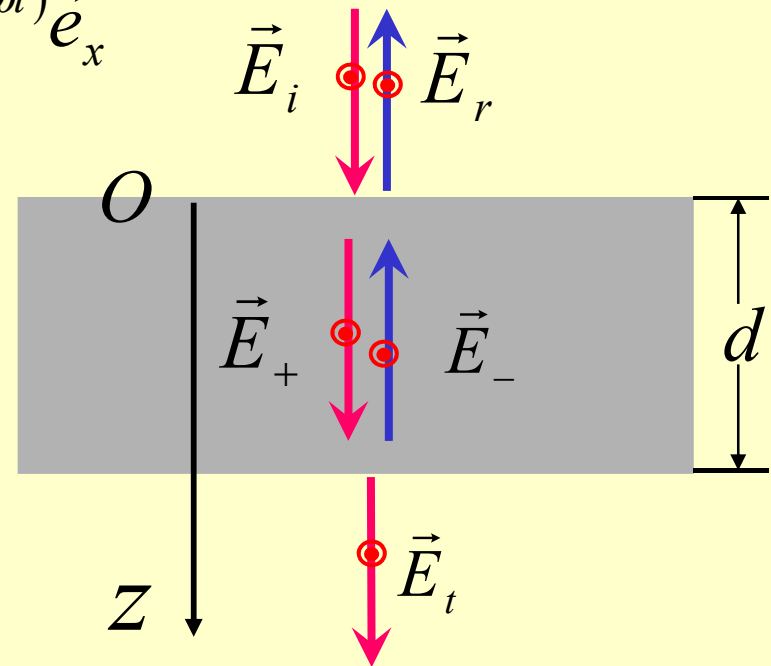
P. A. Obraztsov et al., Nano Lett. 2011, 11, 1540–1545

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x, \quad \vec{E}_r = E_{r0} e^{i(-kz - \omega t)} \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_+ = E_{+0} e^{i(k_m z - \omega t)} \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_- = E_{-0} e^{i(-k_m z - \omega t)} \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_t = E_{t0} e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x$$



$$\varepsilon' = \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega}$$