

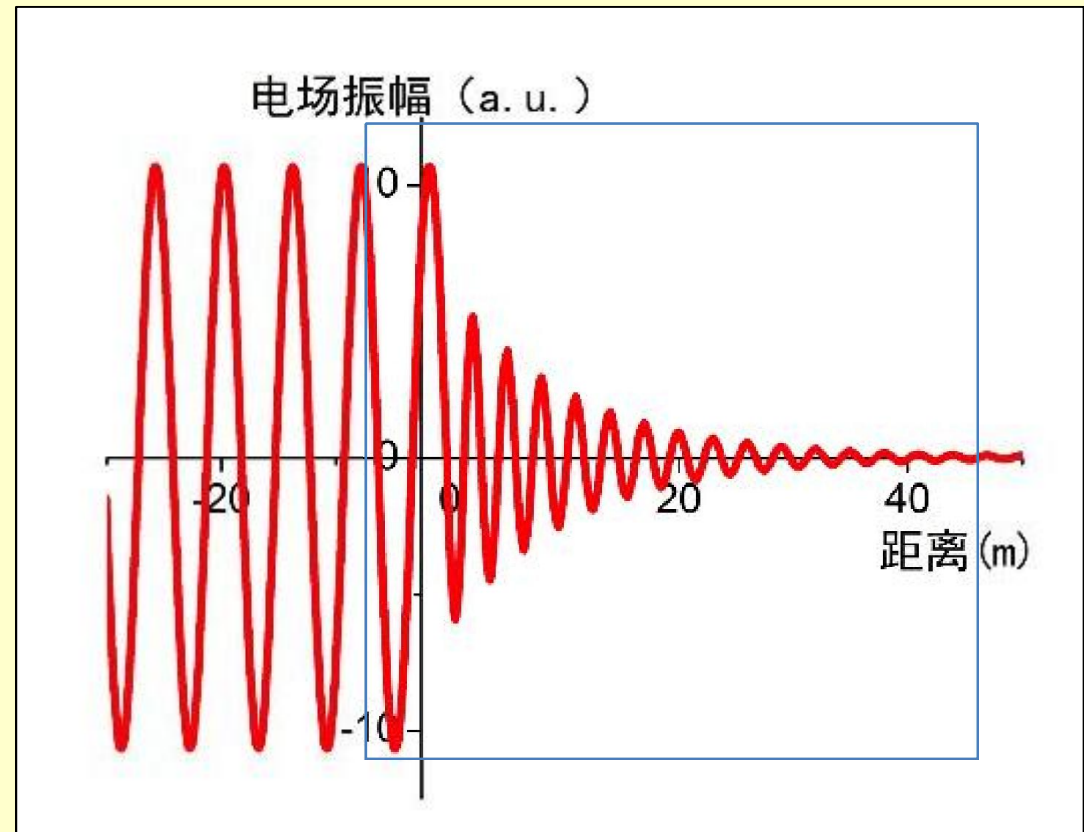
补充一

介质材料的色散特性

当低频电磁波入到到导电介质表面

$$\sigma(\omega) = \frac{Nf_0e^2}{m(\gamma_0 - i\omega)}$$

- 在低频区 ($\omega \ll \gamma$)，电导率可以看成实数；
- 例：对于干燥土壤，在兆赫兹波段相对介电常数 $\epsilon = 4$ ，电导率为 $\sigma = 10^{-4} \text{ s/m}$ ，
- 频率为50MHz的电磁波入射到土壤表面：



可见 / 近红外区金属导体的介电常数

- 金属中存在大量的自由电子
- 在可见和近红外光谱区，金属的介电常数可表示为：

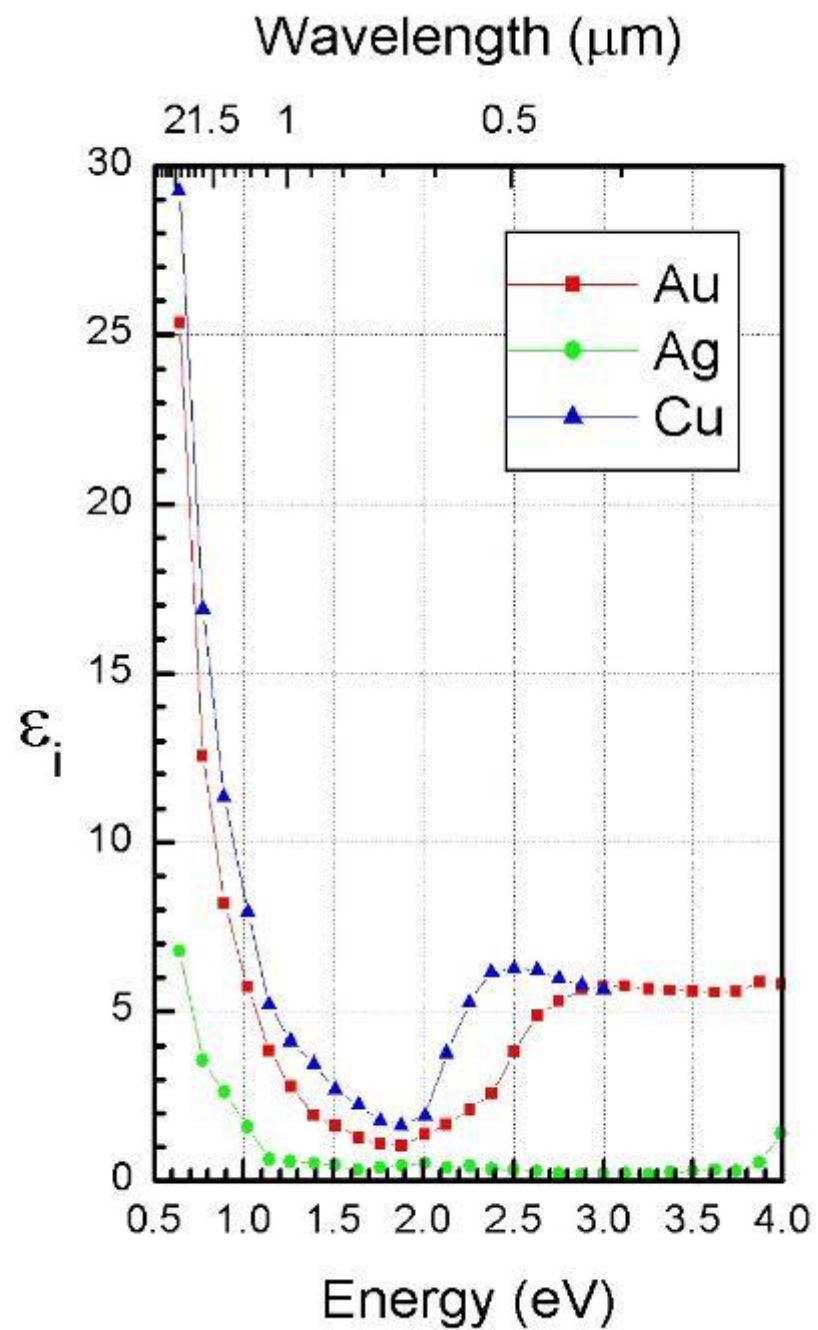
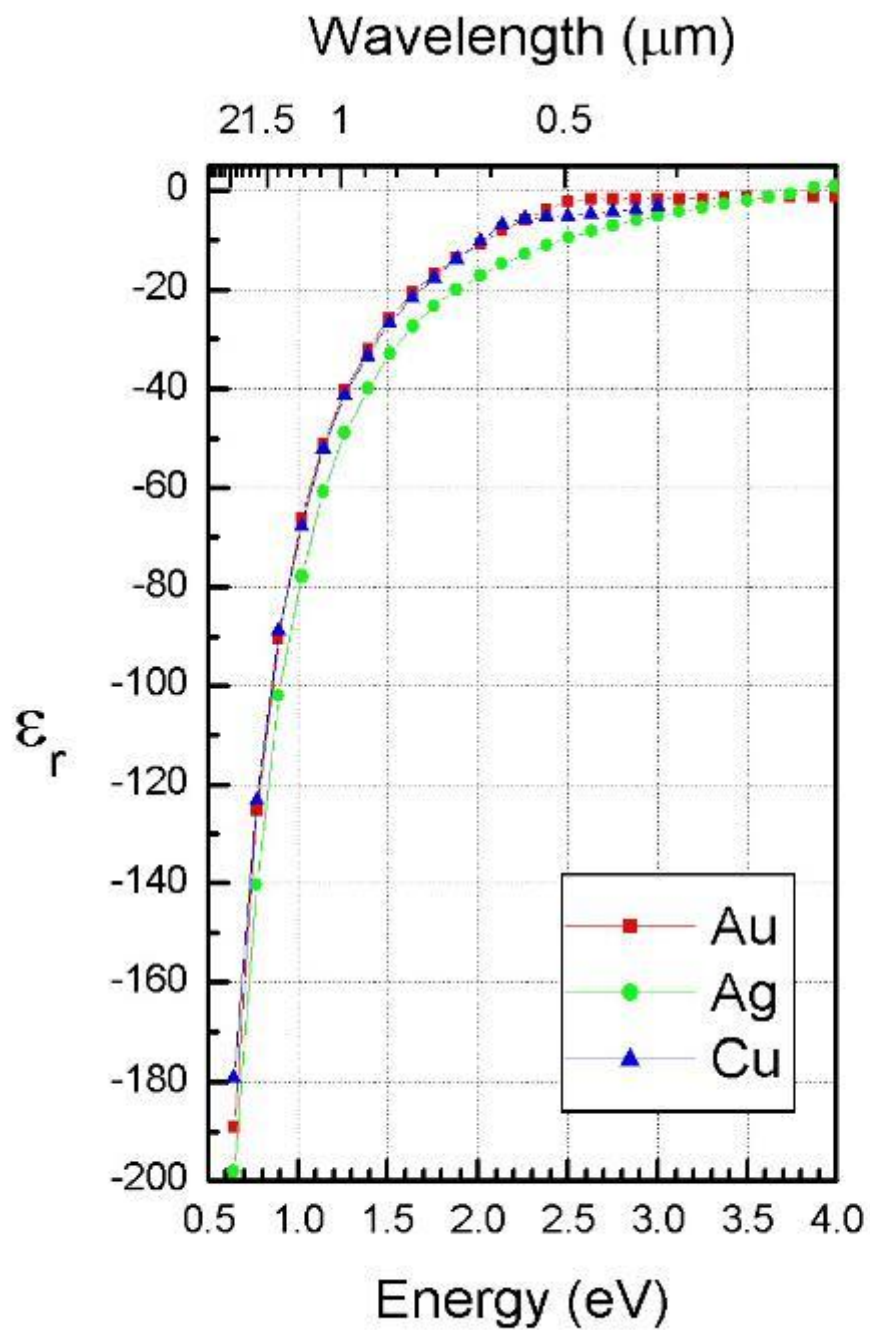
$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma_0)}$$

- 对于贵金属，如金、银，其损耗较小；若忽略损耗，其介电常数表示为

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

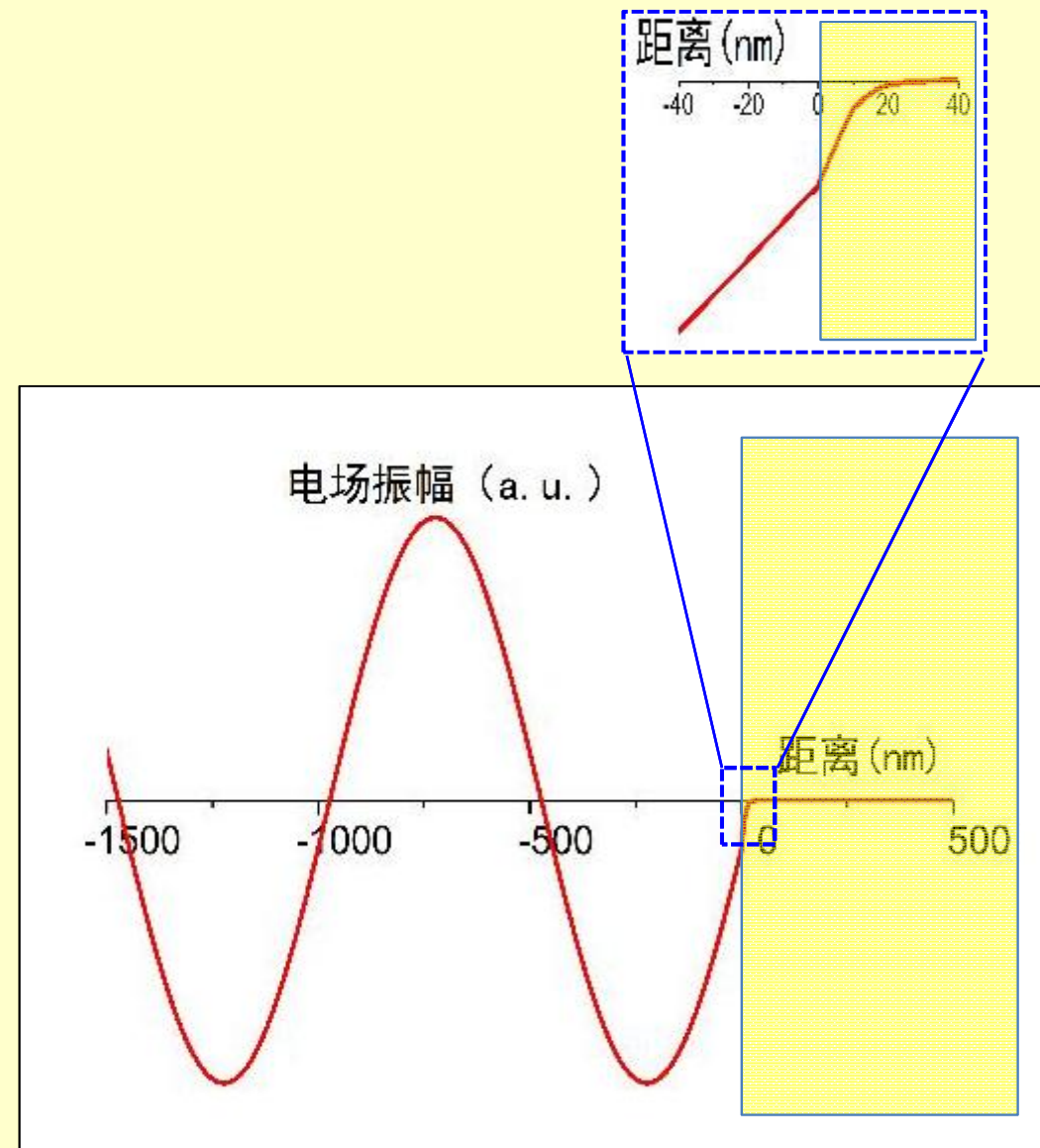
表. 金、银、铜、铝金属导体的等离子频率和损耗值

金属	$\omega_p (10^{16} \text{ rad/s})$	$\gamma (2\pi \times 10^{14} \text{ rad/s})$
Ag	1.37036	0.27332
Au	1.37225	0.40527
Cu	1.12343	0.13798
Al	2.24310	1.24407



当可见 / 近红外光波入到金属导体表面

- 在可见 / 近红外光不允许在金属导体内传播；
- 电磁波一旦入射到金属导体表面，则在金属表面以下急剧衰减。
- 波长 $\lambda = 1000\text{nm}$ 的红外线，铜的相对介电常数 $\epsilon = -34.5 + 1.6i$:



教学中的几点建议

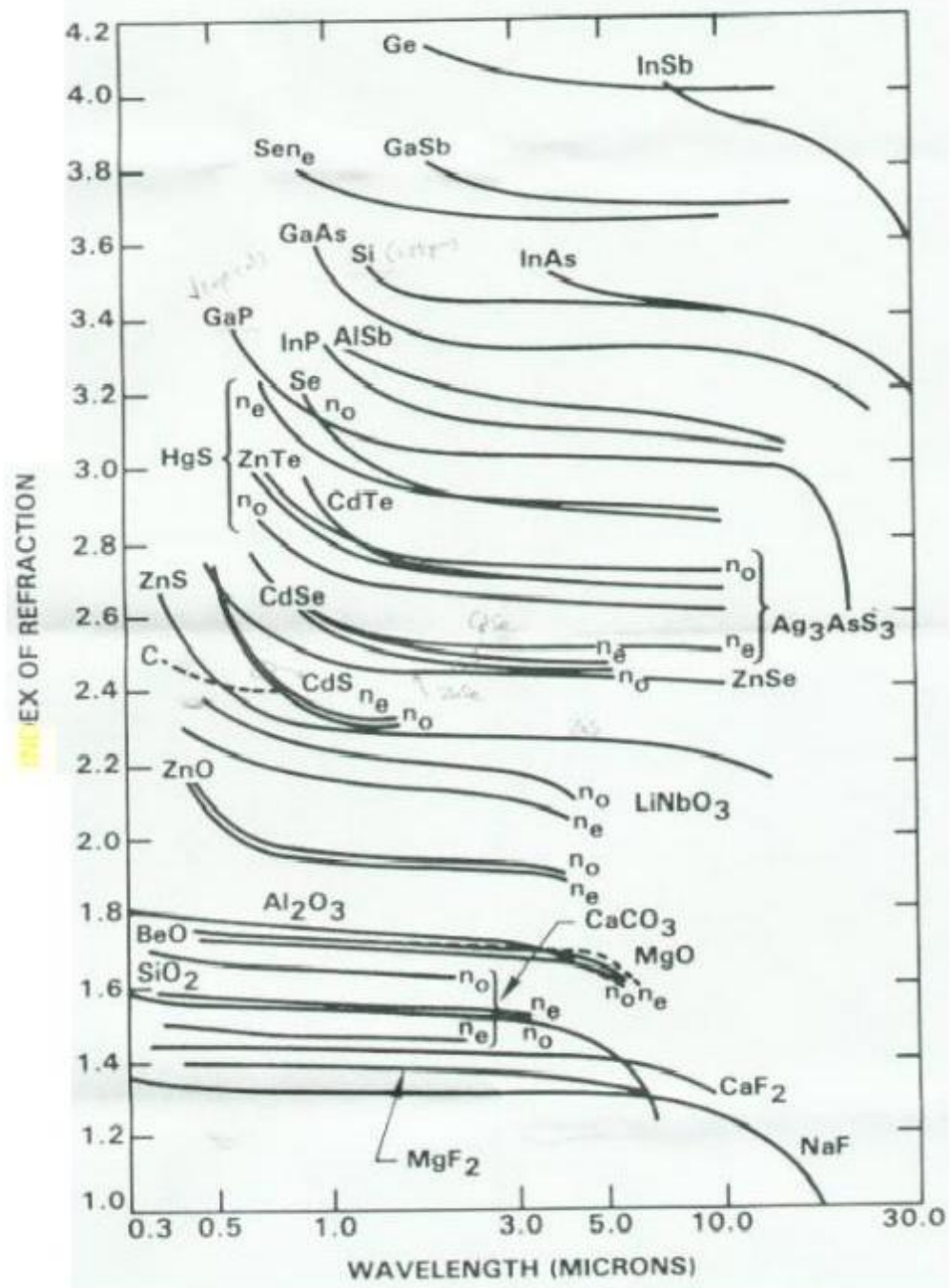
- 在讲解导电介质存在时的电磁波的传播时，首先需明确一般导电介质与金属导体的区别，不能泛泛采用“导体”这一名称；
- 建议把所谓“良导体”改成“良电导介质”；
- 低频电磁波入射到导电介质表面和可见 / 近红外光波入射到金属表面之后，虽然电磁波的振幅都呈现衰减特征，但本质上有着重要的差异，不能混淆：

1. 电介质色散理论——Lorenz模型
2. 金属导体的色散理论——Drude模型

不同频率的波在色散介质中的传播相速度不同——
——介质色散现象

$$n = \sqrt{\mu_r(\omega)\epsilon_r(\omega)}$$

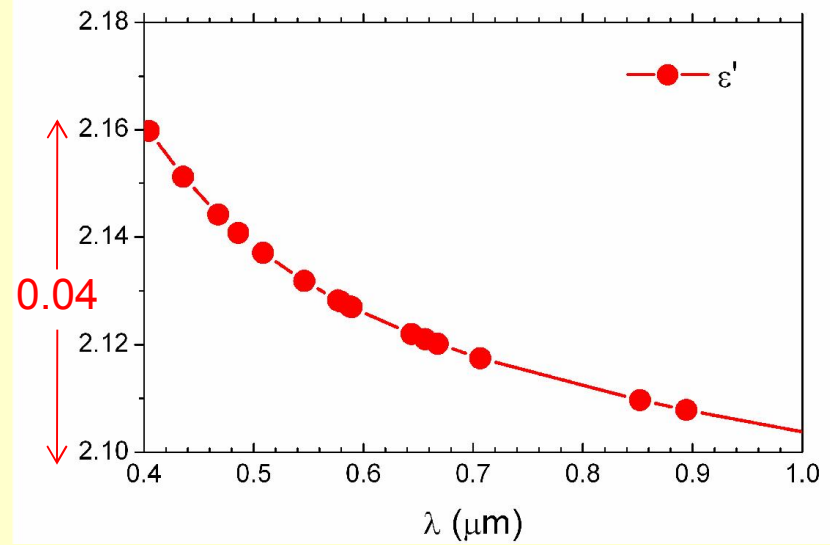
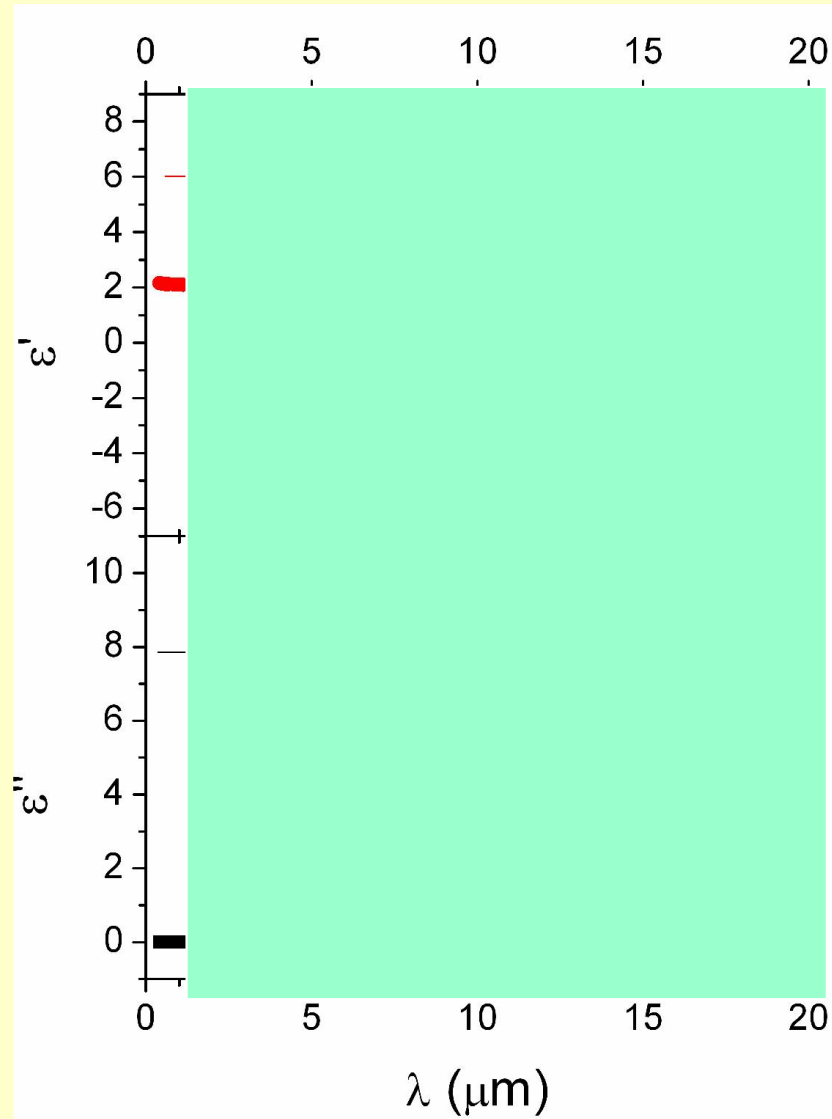
- 在低频区，可以区分电介质（绝缘体）、导体和磁介质；
- 高频区域，电介质、导体和磁介质三者的界限模糊。



玻璃 ($\mu_r=1$)

$$n = n' + in''$$

$$\varepsilon = n^2 = \varepsilon' + i\varepsilon''$$



电介质（绝缘体）色散的物理机制

□ 以极化为例，存在**分子极化**和**电子极化**两种机制；

以H₂O为例，其具有固有电矩：

- ✓ 在高频区，由于**分子**的质量大、惯性大，分子固有电矩的取向机制对极化的贡献降低到零；
- ✓ **电子**的质量小、惯性小，完全能够跟上高频电场的变化。因此在高频区，只剩下电子极化一种机制，从而导致介电常数急剧下降。

水在低频和高频区的色散特性

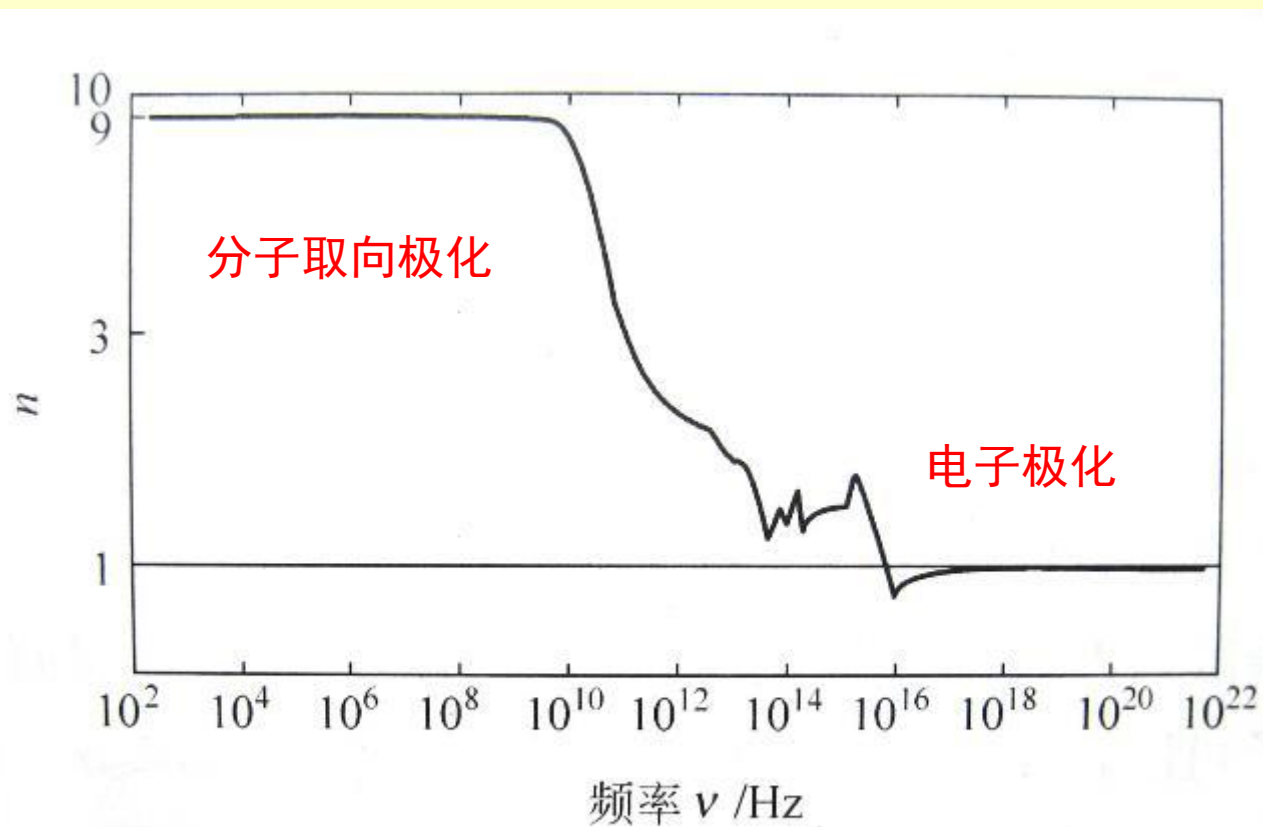
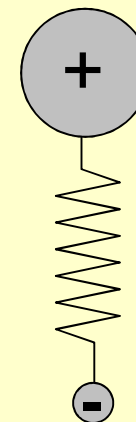


图 8.5.1 水的折射率随频率的变化

1、电介质色散理论——Lorenz模型

1) 无极分子介质的色散模型：

- ① 对于电子极化，可以采用经典的模型来定性解释色散；
- ② 经典的模型给出的是近似的结果。
- ③ 要定量的计算色散特性中的各个参数，需要借助量子力学的知识



2) Lorenz模型

- a) 体系中电子是被**束缚于分子（原子）内部**；
- b) 采用**阻尼谐振子近似**，来表征电子的这种被束缚下的运动；
- c) 该模型适应于**气体、绝缘体和半导体**。

Ludvig Valentin Lorenz

(January 18, 1829 – June 9, 1891)

- a Danish mathematician and physicist.
- He developed mathematical formulae to describe phenomena such as the relation between the refraction of light and the density of a pure transparent substance, and the relation between a metal's electrical and thermal conductivity and temperature
- Using **Lorenz gauge condition**, shortening of Maxwell's equations after Maxwell himself published his 1865 paper

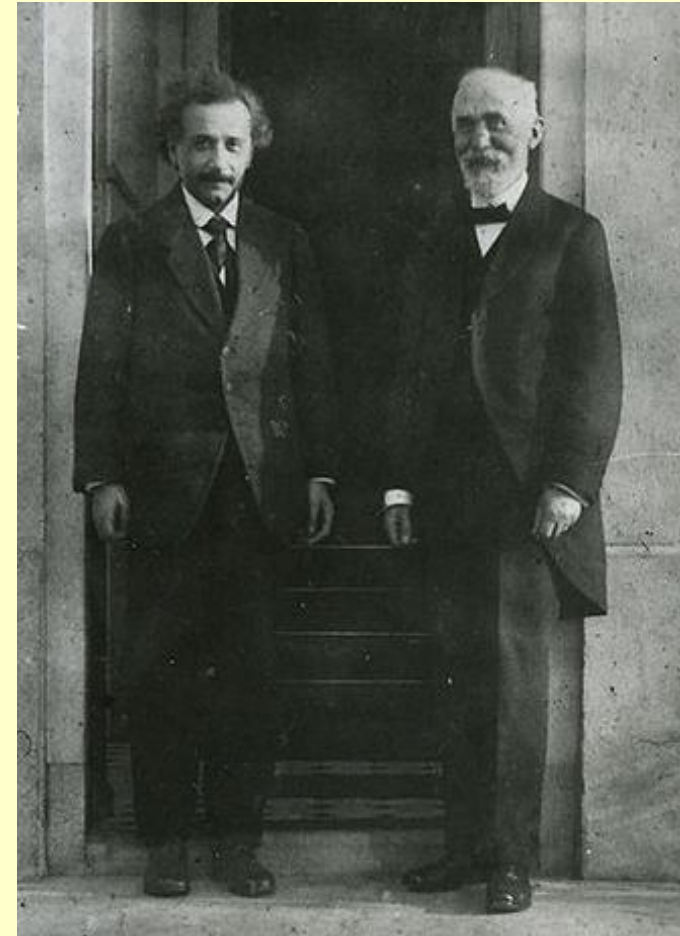


Lorenz

Hendrik Antoon Lorentz

(18 July 1853 – 4 February 1928)

- was a Dutch physicist who shared the 1902 Nobel Prize in Physics with Pieter Zeeman for the discovery and theoretical explanation of the Zeeman effect.
- He also derived the transformation equations subsequently used by Albert Einstein to describe space and time.

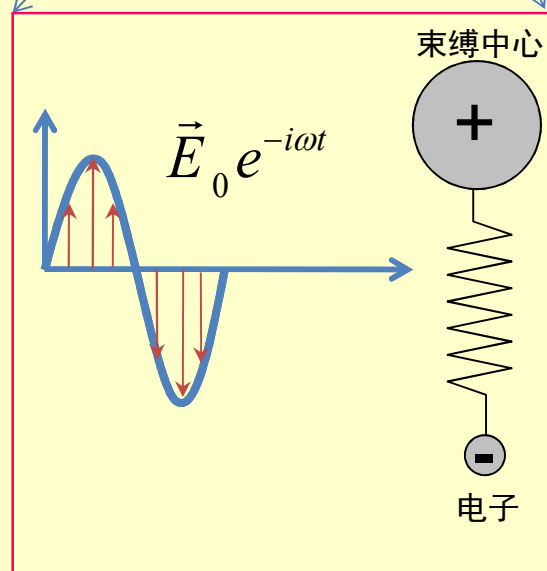
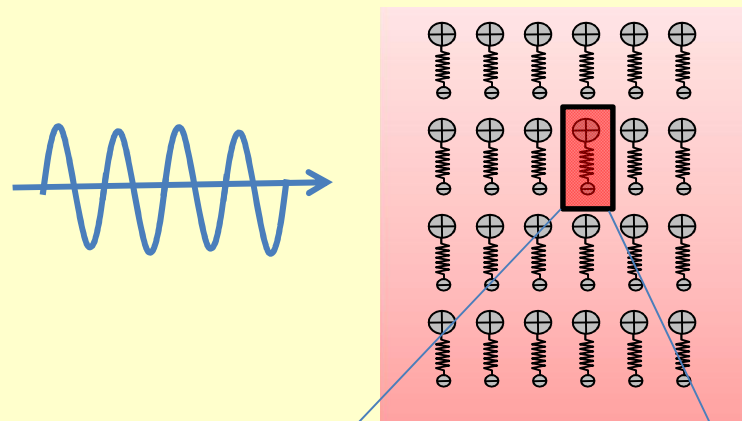


Edward Norton Lorenz

(May 23, 1917 – April 16, 2008)

- an American mathematician and meteorologist,
- a pioneer of chaos theory. He discovered the strange attractor notion and coined the term *butterfly effect*.





$$\omega_0 = \sqrt{k_{spring} / m}$$

m 为电子的质量,
 ω_0 为本征频率.


3) 电子的运动方程:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(\text{谐振子}) + F(\text{阻尼}) + F(\text{外电场})$$

$$-m\omega_0^2 x$$

$$-m\gamma \frac{dx}{dt}$$

$$qE_0 \cos \omega t$$


$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = (-m\omega_0^2 x) + (-m\gamma \frac{dx}{dt}) + (qE_0 \cos \omega t)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = (-m\omega_0^2 x) + (-m\gamma \frac{dx}{dt}) + (qE_0 e^{-i\omega t})$$

带入试探解: $x = x_0 e^{-i\omega t}$

解得: $x = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$

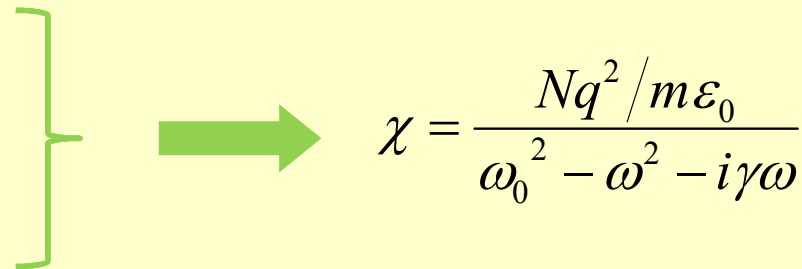
$$x = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E$$

4) 电子位移引起的极化强度

① $P = Nqx$ (N是单位体积内分子数目)

$$P = \frac{Nq^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E$$

② $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$


$$\chi = \frac{Nq^2/m\epsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

令: $\omega_p^2 = Ne^2/m\epsilon_0$

$$\chi = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

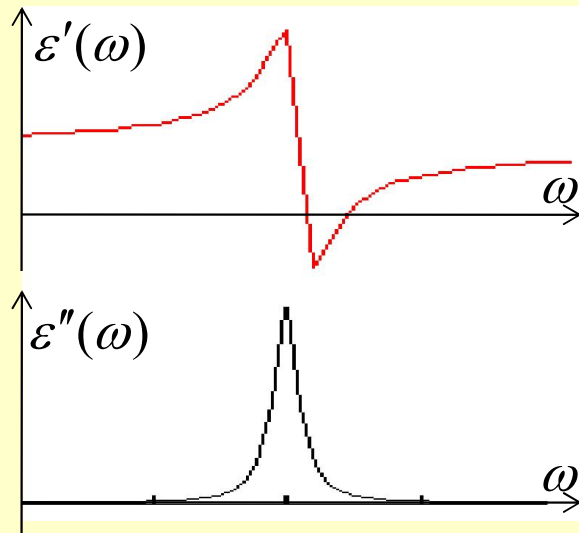
5) 相对介电常数: $\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (\text{介电常数为复数})$$

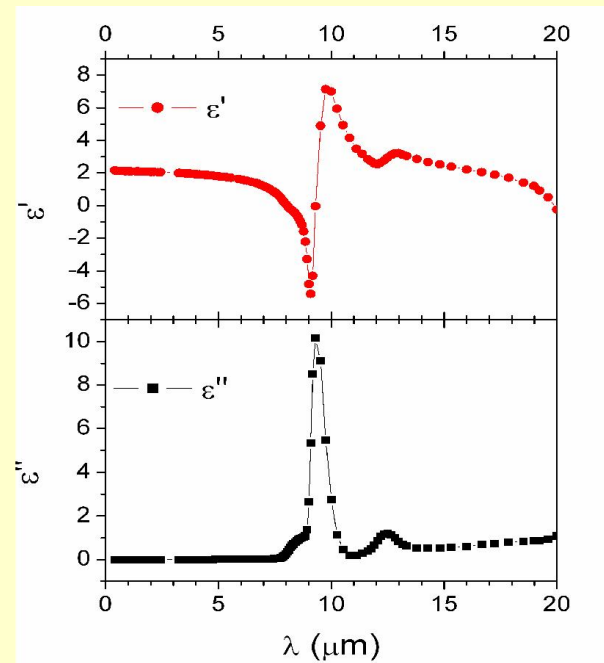
$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

6) 介电常数与实验测量值的比较:

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon' = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ \varepsilon'' = \frac{\omega_p^2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \end{array} \right.$$



(Lorenz模型介电函数示意图)



(玻璃的介电常数测量值)

若 $\mu_r=1$, $\text{Im}(\varepsilon)\ll 1$:

$$\varepsilon^2 = n + i\alpha$$

$$\varepsilon' = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

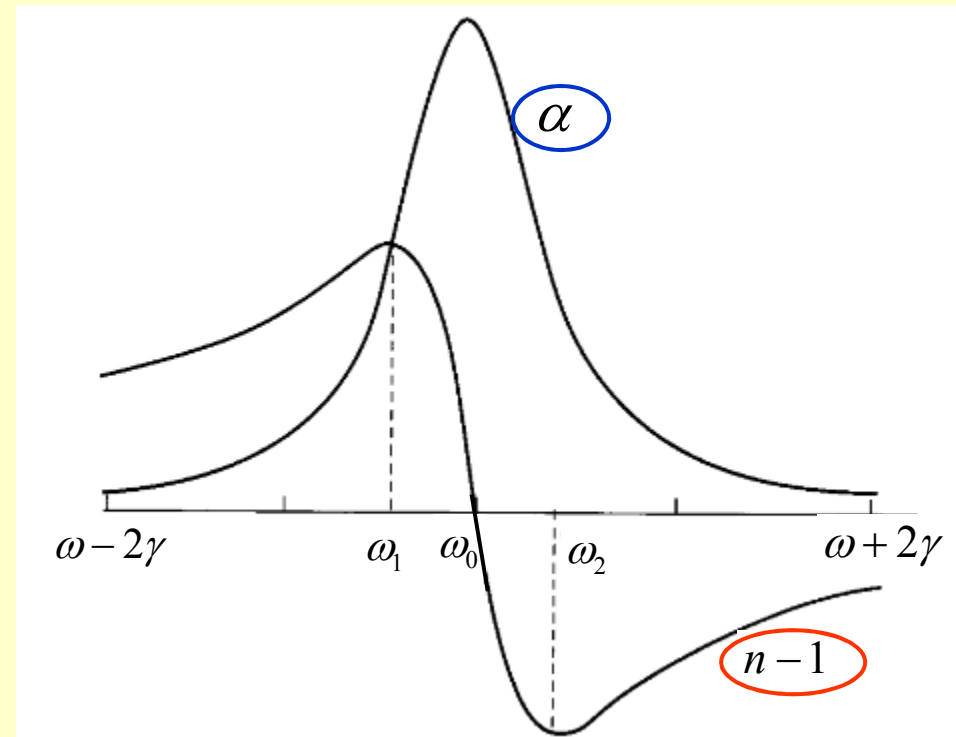
$$n = \sqrt{\mu_r(\omega) \varepsilon_r(\omega)}$$

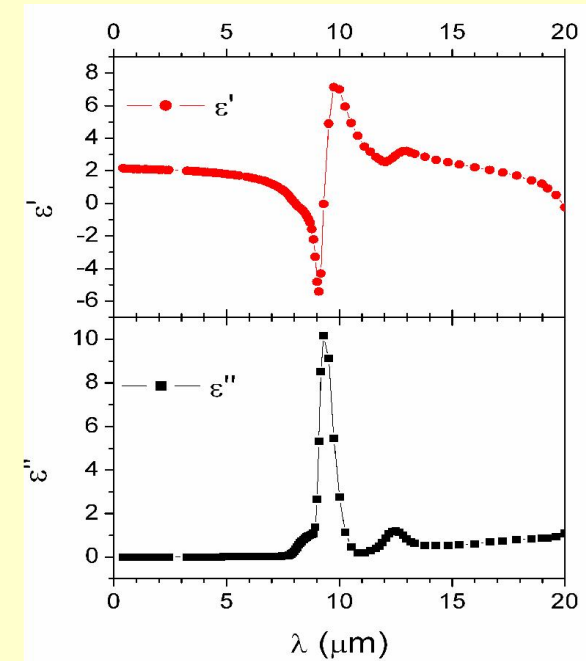
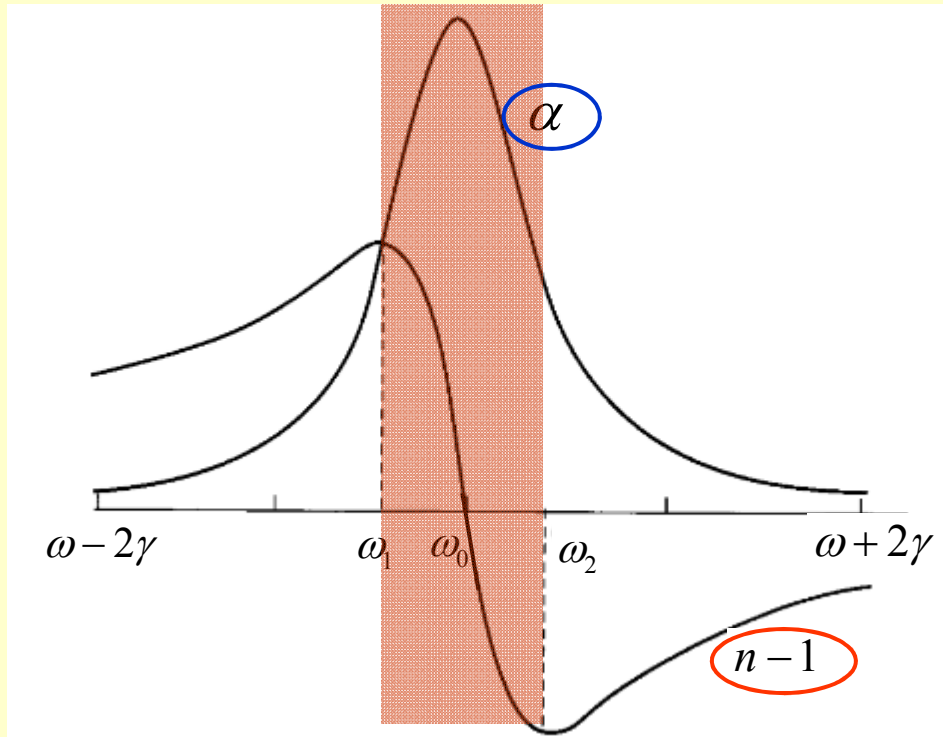
介质的折射率:

$$n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

介质的吸收系数:

$$\alpha = \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$





(玻璃的介电常数测量值)

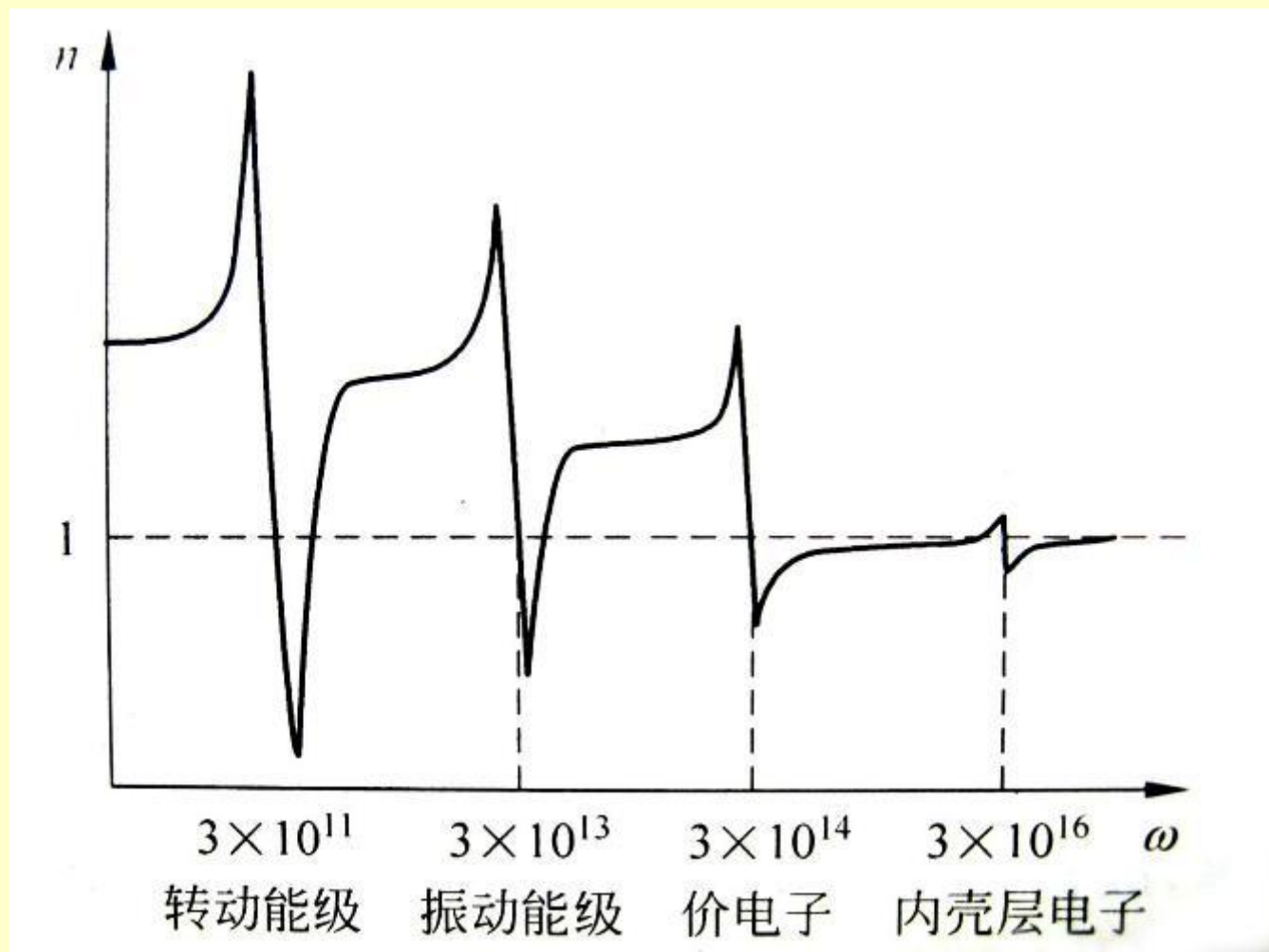
- 在共振区域附近，折射率变化反常，即随着频率的增加，折射率反而减小，称之为**反常色散区**；
- 反常色散区对应的区域也是**吸收极大的区域**；
- 在反常色散区，光速可以超过 c ，但群速度则不会超过 c 。

7) 补充说明:

- a) 如同其它的简化模型一样, 这里采用的模型是体系真实特性的一种近似;
- b) 一般地, 介电常数的虚部可以忽略, 除非当 ω 接近于 ω_0 时;
- c) 有些分子, 电子由于所处环境的不同, 分子可能存在多个特征频率 ω_j ; 假设每个分子中具有特征频率 ω_j 的电子数为 f_j , 则

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}$$

电介质的折射率随频率的变化特性



2. 金属导体的色散理论——Drude模型

http://en.wikipedia.org/wiki/Drude_model

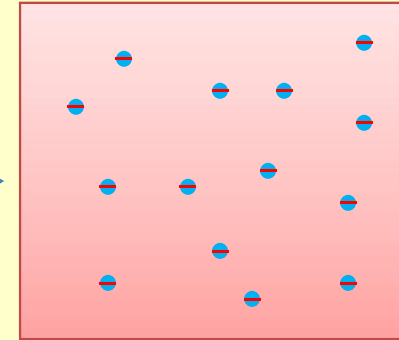
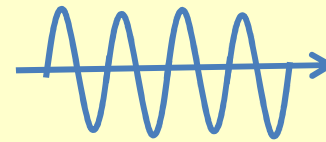
1) Drude模型:

- a) 认为体系中电子是自由运动的;
- b) 用电子气模型近似, 来描述电子运动;
- c) 适应于金属良导体。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = (-m\omega_0^2 x) + (-m\gamma \frac{dx}{dt}) + (qE_0 \cos \omega t)$$

$$\omega_0 = 0$$

2) 电子的运动方程:



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = (-m\gamma \frac{dx}{dt}) + (qE_0 e^{-i\omega t})$$

$$x = -\frac{q/m}{\omega^2 + i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$$

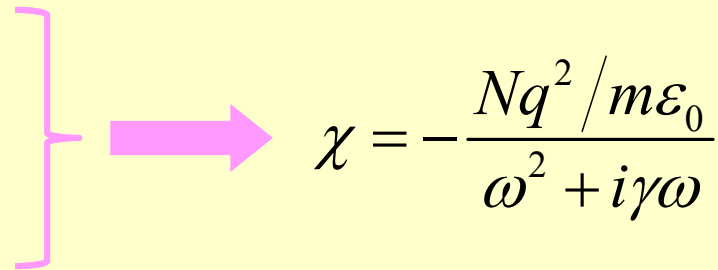
$$x = -\frac{q/m}{\omega^2 + i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$$

3) 电子位移电引起的极化强度:

$$\vec{P} = Nqx$$

(N是单位体积电子数)

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$


$$\chi = -\frac{Nq^2 / m\varepsilon_0}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

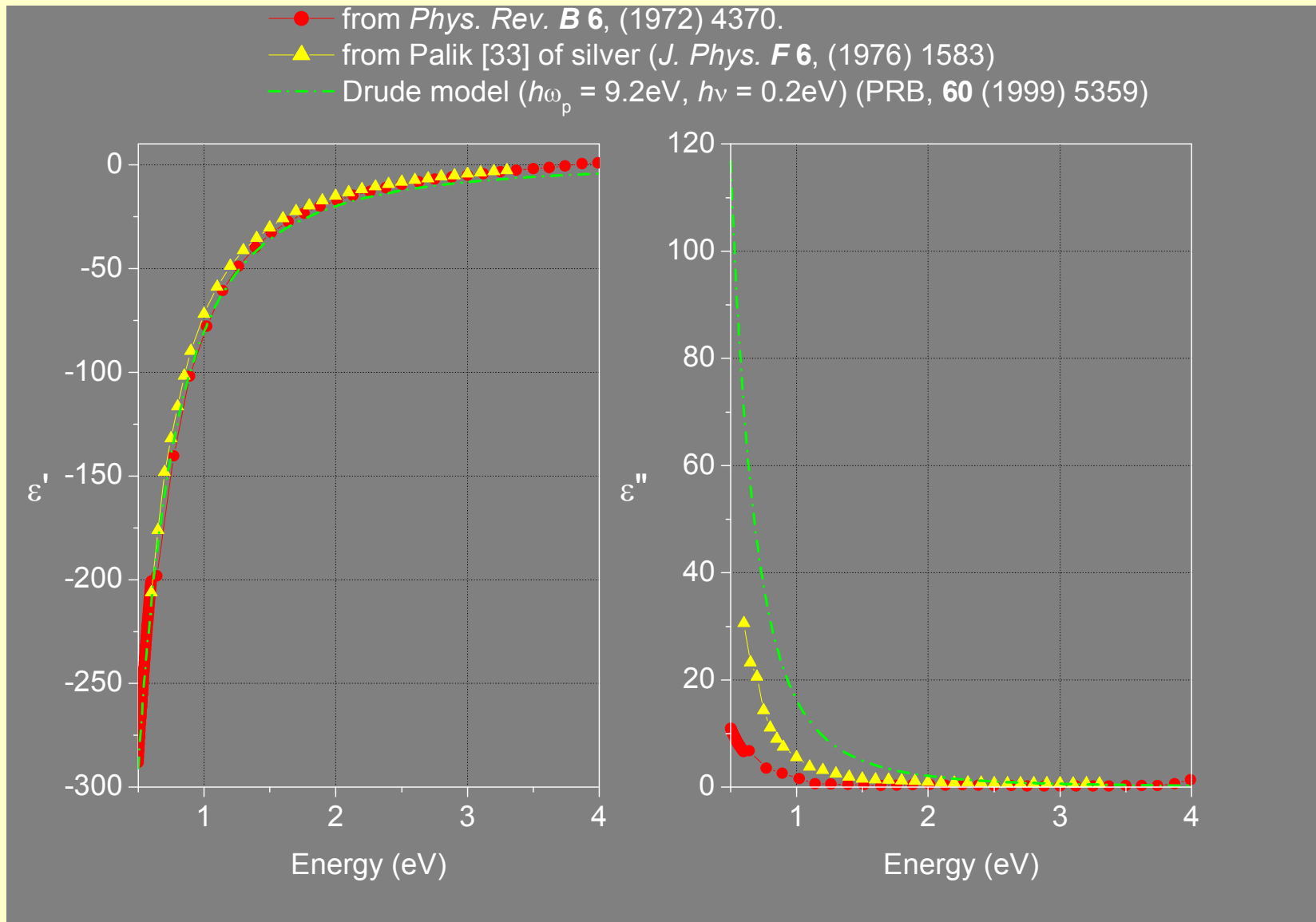
4) 相对介电常数: $\varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi$

$$\text{令 } \omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0},$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$\epsilon_r = \epsilon' + i\epsilon''$$



3、电磁波在导电材料中的传播

有两种处理方式：

- A. 当作介质来处理
- B. 当作导体来处理

A. (在高频情形下) 当作一般介质来处理:

此时, 采用复介电常数

$$\rho = 0, \quad \vec{J} = 0$$
$$\vec{D} = \tilde{\varepsilon} \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$



$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

考虑时谐 (单色) 波: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$

代入得到

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \tilde{\varepsilon} \omega^2 \vec{E} = 0$$

B. 当作导电介质来处理:

$$\rho = 0,$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \text{ (due to conduction electron current)}$$

$$\vec{D} = \epsilon_c \vec{E} \text{ (due to polarization),}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

考虑时谐（单色）波： $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$

代入得到

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \left(\epsilon_c + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \omega^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \tilde{\epsilon} \omega^2 \vec{E} = 0$$