第五章：电磁波的辐射

电磁波辐射理论

- 1865年，麦克斯韦从理论上预言了电磁波存在；
- 1888年，赫兹在实验室得到了电磁波（相隔23 年！）；
- 1895年，马可尼发射了第一个远距离传播的无线信号（马可尼作为无线电报发明人而获得1909年的诺贝尔物理奖）；
- 20世纪40年代的二次世界大战发展了雷达技术，无线电技术（包括辐射理论）取得了重大的发展。

辐射电磁波

① 无线电波是由**发射天线**上的高频交变电流辐射出来的；

② 天线上的交变电流和其所辐射的电磁场是相互作用的——复杂边值问题

③ 本章的讨论仅限于：给定电流分布，如何计算辐射电磁波。

本章内容：

§1 描述一般情况电磁场的矢势和标势的概念

§2 矢势和标势的解——推迟势（有限传播速度）

§3 推迟势的应用——小区域给定电荷电流分布的辐射

§1 矢势和标势的一般概念

本节主要内容

1. 电磁场的**势描述**
2. 势的非唯一性、势的规范变换
3. 物理量的规范不变性
4. 两种常用的规范辅助条件
5. **达郎贝尔方程——势的基本方程**

1、电磁场的势描述

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

1）真空中：

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \\ &\nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned}}$$

2）磁场：

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x},t) = 0}$$

①无源、有旋场；

②由于其无源性 ，总可以引入另一个矢量来描述

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

③ 矢势A的物理意义：

在任意时刻，矢势沿任意一闭合回路的线积分等于该时刻通过该回路的磁通量。

3）电场：

激发电场的源 $\begin{cases} \text{电荷} \\ \text{变化的磁场} \end{cases}$

$$\nabla \times \left(\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t} \right) = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

① $\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 是无旋场；

②可以引入标势描述矢量场：$\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi(\vec{x},t)$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x},t) = -\nabla \varphi(\vec{x},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t}}$$

4）电磁场的势描述：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

① 对于变化的电磁场，电场不再是保守力势场；

② 相应地，标势不具有势能的意义；

③ 对于变化的电磁场，矢势和标势作为一个整体，共同确定电磁场。

2、势的规范变换

$$\left(\vec{A},\varphi\right)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{A} \Rightarrow \vec{A}' \quad \left(\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi\right)$$

$$\vec{B}' = \nabla \times \left(\vec{A} + \nabla \psi\right) = \vec{B}$$

① 矢势在上述变换之后，磁场本身没有变化

② 矢势在上述变换之后，假设我们能够不考虑标势的变换，则

$$\vec{E}' = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Psi$$

$$= -\nabla \left(\varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \neq \vec{E}$$

$$\boxed{\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}}$$

1）势的规范

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

① 在这样的变换之下，电磁场(E和B)保持不变；

② 每组（ A、 ）的选择称为一种规范。

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

2）势的规范变换

$$\left(\vec{E}, \vec{B}\right) \begin{cases} \left(\vec{A},\ \varphi\right) \\ \left(\vec{A}',\ \varphi'\right) = \left(\vec{A} + \nabla \psi,\ \varphi - \dfrac{\partial \psi}{\partial t}\right) \end{cases}$$

——规范变换

在规范变换下，所对应的E和B是相同的（规范变换不变性）。

3、物理量的规范不变性

① 在规范变换下，所对应的**E**和**B**是相同的——称之为物理量的规范变换不变性（简称规范不变性）；

② 在经典电动力学中，所有的物理量和物理规律都具有规范不变性；

③ 在量子力学中，所有可测量的（电磁）物理量仍然具有规范不变性。

在量子力学中，**E**和**B**不能描述电磁场的所有物理效应；

AB效应不能用磁场B的局域作用描述；需要采用矢势沿闭合回路的积分 $\oint_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ 加以描述；

问题：$\oint_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ 是否具有规范不变性？

$$\oint_C \vec{A}'\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_C \left(\vec{A}+\nabla\psi\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

$$= \oint_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \oint_C \nabla\psi\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

$$= \oint_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A}+\nabla\psi \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\psi}{\partial t} \end{cases}$$

④ 规范不变性是决定相互作用的基本原理；

⑤ 传递这种相互作用的场称为**规范场**；

⑥ 传递电磁相互作用的场是人们熟知的一种规范场；

⑦ 弱相互作用和强相互作用也具有相应的规范不变性。

4、两种常用的规范辅助条件

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

1）规范辅助条件，或规范条件

① 为了确定 A，减少任意性，我们可以对 A 的散度加上一些限制条件，称之为规范辅助条件，或者简称为规范条件；

② 电场和磁场的性质与这里所选的规范条件无关。

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

2）Lorenz规范 辅助条件：

① Lorenz规范条件（gauge condition）

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0}$$

② 若采用Lorenz规范，关于势的微分方程可以简化为简单的、对称形式；

③ 采用Lorenz规范，对讨论辐射问题、相对论时空、运动物体的电动力学问题会带来很多的方便。

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial}{\partial(\mathrm{i}ct)}\left(\mathrm{i}\frac{\varphi}{c}\right) = 0$$

$$x_4 = \mathrm{i}ct$$

在第六章：引入四维势（四个分量）

$$\boxed{A_4 = \mathrm{i}\frac{\varphi}{c},}$$

$$\boxed{A_\mu = \left(A_1,\ A_2,\ A_3,\ \mathrm{i}\frac{\phi}{c}\right)}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial}{\partial(\mathrm{i}ct)}\left(\mathrm{i}\frac{\varphi}{c}\right) = 0$$

$$x_4 = \mathrm{i}ct$$

$$A_4 = \mathrm{i}\frac{\varphi}{c}$$

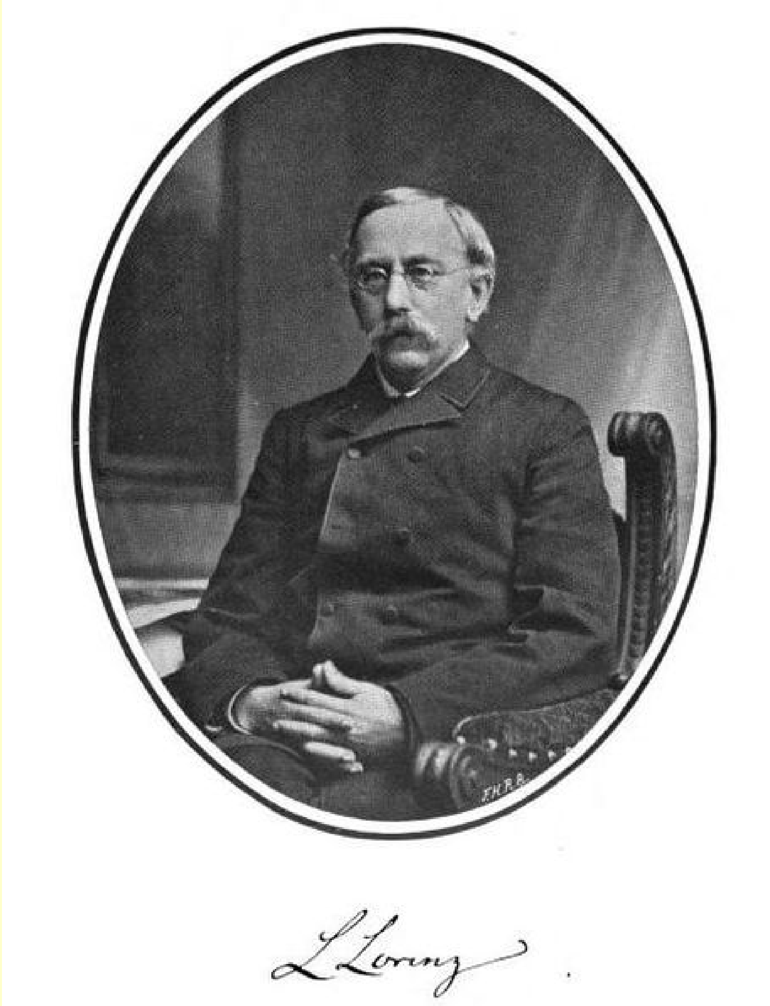
③　洛仑兹规范的四维形式：

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

Ludvig Valentin Lorenz

(January 18, 1829 – June 9, 1891)

- a Danish mathematician and physicist.
- He developed mathematical formulae to describe phenomena such as the relation between the refraction of light and the density of a pure transparent substance, and the relation between a metal's electrical and thermal conductivity and temperature
- Using ***Lorenz gauge condition***, shortening of Maxwell's equations after Maxwell himself published his 1865 paper



$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

3）库仑规范条件：

① 库仑规范：

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$$

② 对于自由空间（j=0,ρ=0），采用库仑规范条件，会使得势的微分方程变得简单。

③ 非相对论量子力学（电磁场量子化），以及量子电动力学中，也采用库仑规范

④ 采用不同的规范，只是改变运算过程，不会改变运算结果（场不变）。

5、达郎贝尔方程

——关于势的基本方程

1）真空中， 势的基本方程

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\cdot\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi+\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\[2ex]\nabla^2\vec{A}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu_0\vec{J}\end{cases}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2）采用库仑规范：

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

标势所满足的方程与静电场的情形相同（其解为库仑势的形式）

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \varphi = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

3）采用洛伦兹规范：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

矢势和标势所满足的微分方程具有相同的形式。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

——达郎贝尔方程（非齐次的波动方程）

$$\Rightarrow \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \varphi \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mu_0 J_1 \\ \mu_0 J_2 \\ \mu_0 J_3 \\ \rho/\varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

波动方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{bmatrix}\vec{A}\\ \varphi\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\mu_0\vec{J}\\ \rho/\varepsilon_0\end{bmatrix}$$

辅助条件

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

① 在Lorenz规范下，**电荷产生标势波动；电流产生矢势波动**；

② 离开电荷和电流分布的区域以后，矢势和标势都以波动形式在空间传播；

③ 由它们导出的电场和磁场也以波动的形式在空间传播。

6、自由空间中的平面电磁波

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = -\mu_0 \vec{J}$$

1）采用库仑规范：

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

全空间为自由空间

$\nabla^2 \varphi = 0$ ＋ 与 t无关，$\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = 0$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

平面波解：$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$

库仑规范要求：$\boxed{\vec{k}\cdot\vec{A} = 0}$

——矢势只有横向分量振动

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)} \qquad \vec{k}\cdot\vec{A} = 0$$

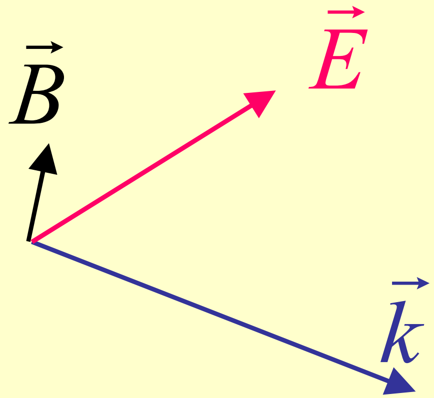
$$\vec{B} = \mathrm{i}\vec{k}\times\vec{A}$$

$$\vec{E} = \mathrm{i}\omega\vec{A}$$

——（全空间）电场和磁场为横振动

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}$$

或者 $$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{\mathrm{e}}_k \times \vec{E}}$$



——与第四章第一节的结果吻合

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0}$$

2）采用Lorenz规范

全空间为自由空间

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0,$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

平面波解：$\vec{A}=\vec{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)}$，$\varphi=\varphi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)}$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_0=\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\cdot\vec{A}_0}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \varphi_0 = \frac{c^2}{\omega}\vec{k}\cdot\vec{A}_0$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \nabla\times\vec{A} = i\vec{k}\times\vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

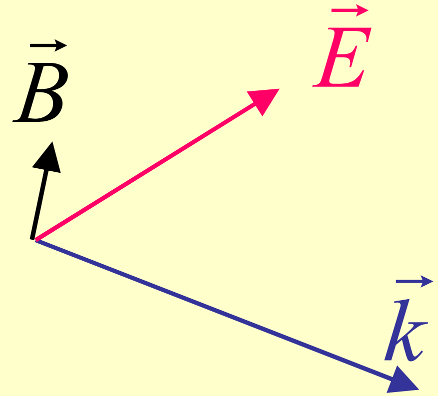
$$= -i\varphi\vec{k} + i\omega\vec{A}$$

$$= -i\frac{c^2}{\omega}\left[\vec{k}\left(\vec{k}\cdot\vec{A}\right) - k^2\vec{A}\right]$$

$$= -i\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{A}\right)$$

$$= -\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\times\vec{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -c\vec{e}_k\times\vec{B}}$$



——与第四章第一节结果吻合