上次课

✓ 静电场可以用一个标量场的梯度（负值）表示：

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla \varphi(\vec{x})$$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V'$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) \equiv 0$$

✓ 从静电场的库仑定律出发，向瞬变场推广得到的电动力学的基本方程之一：

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{x},t)$$

✓ 纯电偶极子的电势表达式：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3},\left(\varphi \propto \frac{1}{r^2}\right)$$

✓ 重要的数学公式之一：

$$\underline{\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}).}$$

✓ 回忆 Stokes 定理：

$$\int_S \mathrm{d}\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \oint_L \mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{A}$$

§2 电流和磁场

关于对磁现象的研究,我们宋代的科学家沈括（1031－1095）是第一个观测到悬挂的磁针指向南北向，并将它应用到航海的导航上。而揭示出电与磁之间的关系的第一人则是丹麦哥本哈根大学的 Oersted 教授,他在 1819 年一次偶然的实验中发现通电的导线能够影响到附近磁针的指向，这就是有名的 Oersted 实验。在麦克斯韦建立完整的电磁场理论之前，对磁的研究有重要贡献的还有 André-Marie Ampère,Carl Friedrich Gauss; Jean-Baptiste Biot and Félix Savart(Biot-Savart 定律，1920),和 Michael Faraday。

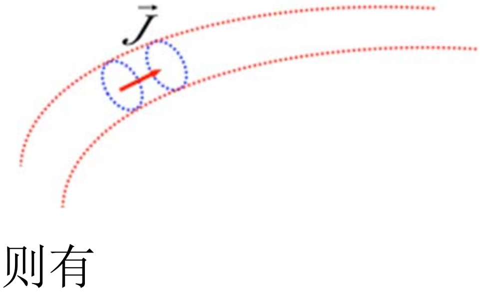
本节关于静磁场的讨论，我们将和静电场做比较，简要的给出静磁场的基本特征

1. 电流、电荷守恒定律

1）电流密度矢量$\vec{J}$的定义:

a) 空间某处电流密度矢量的方向就是该处电场强度的方向;

b) 大小等于单位时间垂直通过单位面积的电量;



c) 设空间某位置处的电荷密度为ρ，电荷运动的平均速度为$\vec{v}$，则有

$$\vec{J} = \rho\vec{v}$$

2）电流强度：

➢ 单位时间内垂直穿过某一横截面的电量称为电流强度，用 I 表示；

➢ 电流强度与电流密度矢量之间的关系：

$$\mathrm{d}I = \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = J\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$I = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

3）电荷守恒定律

实验表明电荷的总量是守恒的；

如果在空间内任意取一封闭曲面 S，则单位时间内穿过曲面 S 而流出去的电量为

$$I = \oint_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

根据电荷的总量守恒，流出去的电量应等于封闭曲面 S 内的总电荷在单位时间内的减少量

$$\oint_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\mathrm{d}V$$

如果所选取的曲面不随时间而变化，则上式可写成：

$$\oint_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

由高斯定理得：

$$\oint_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{J}\mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

或者

$$\int_V \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \mathrm{d}V = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

此为电荷守恒定律的数学表达式，也称为**电流的连续性方程**。

再注意几点：

a) 这里的 $\rho(\bar{x},t)$ 为电荷密度，而 $\vec{J}(\bar{x},t)$ 为电（荷）流密度，那么守恒定律的形式是：流密度的散度＋电荷量密度变化率＝0。这是关于粒子流守恒的一般形式。

b) 类似的还有在介质的极化部分我们会见到类似的连续性方程：

极化电荷密度与极化电流也满足电流的连续性方程：

$$\nabla \cdot \vec{J}_P + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} = 0$$

介质磁化形成的磁化电流满足的联系方程则是

$$\nabla \cdot \vec{J}_M = 0$$

（孤立的磁荷不存在，至少目前实验上尚未发现）

c) 在稳恒电流情况下物理量不随时间而变化，$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$，得到

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

——稳恒情况下电流线是闭合的，换言之，对于一个闭

合面（包含的体积可以无穷小）而言，单位时间内有多少流入，就有多少量流出（体内的电荷密度不随时间变化）。

3、电流与电流之间的相互作用、磁场对电流的作用

实验上观测到：电流与电流之间存在相互作用；这种相互作用力是通过称为磁场的物质传递的；

电流元在磁场中所受到的力为

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

$I\mathrm{d}\vec{l}$ 称为电流元；线元 $\mathrm{d}\vec{l}$ 的方向与电流的流向同向；矢量 $\vec{B}$ 描述电流元所在点磁场的性质——磁感应强度

4、恒定电流所激发的磁场——毕奥-萨伐耳（Biot-Sarvart）定律

Biot-Sarvart 通过电流之间的相互作用，从数学上给出了 $\vec{x}'$ 处的电流元 $\vec{J}\left(\vec{x}'\right)dV'$ 在场点 $\vec{x}$ 处产生的磁场；

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'$$

式中 μ_0 为真空的磁导率，$\vec{B}$ 称为磁感应强度。

后面我们会从静电场与静磁场的很多公式的对比发现，在很多的情况下 $\vec{B}(\vec{x})$ 与 $\vec{E}(\vec{x})$ 有着很多的对应。

如果电流集中在一条细导线上，设导体的横截面面积为 S_n，

则有

$$\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V' = JS_n\mathrm{d}\vec{l} = I\mathrm{d}\vec{l}$$

通过细导线的恒定电流所激发的磁场为：

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

毕奥-萨伐耳定律是磁场分布规律的积分形式。

- 如果有一电荷以速度 $\vec{v}$ 运动（$v << c$，且忽略其加速度），则根据上述定律，可得到由它所激发的磁场（严格的推导需要等我们学到推迟势一章节）：

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3} = \varepsilon_0\mu_0\vec{v}\times\vec{E}$$

5、 磁场的散度

电流与其邻近点的磁场之间的关系

根据毕奥-萨伐耳定律

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'$$

式中 $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$ 。

利用关系式：

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

得到：

$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\times\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

进一步利用数学公式：

$$\nabla\times\left(\varphi\vec{f}\right)=(\nabla\varphi)\times\vec{f}+\varphi\nabla\times\vec{f}$$

得到

$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\nabla\times\left(\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\right)-\frac{1}{r}\nabla\times\vec{J}(\vec{x}')\right]\mathrm{d}V'$$

由于∇只对观察点$\vec{x}$微商，则有

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x})&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\times\left(\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\right)\mathrm{d}V'\\&=\nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V'\\&\equiv\nabla\times\vec{A}\end{aligned}$$

矢势$\vec{A}$定义为

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V'$$

磁场的散度

$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x})=\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)\equiv 0$$

——（2.13）

结论：磁场是无散度的场。

上述公式不仅适用于恒定情况，也适用于非恒定的一般情况，即有

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x},t) \equiv 0,$$

根据数学中的高斯定理，

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} \mathrm{d}V$$

从而得到

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \equiv 0$$

总结一下：非恒定的一般情况，有

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x},t) \equiv 0,$$

$$\oint \vec{B}(\vec{x},t) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \equiv 0$$

6、 磁场的旋度

在电磁学中我们知道，载电流导线周围磁场的磁感线总是围绕着导线的一些闭合曲线，磁场沿闭合曲线的环量与闭合曲线所围曲面的电流 I 成正比，

$$\oint_L \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 I$$

其中 L 为任一闭合曲线,I 为通过 L 所围曲面的总电流。

对于连续电流分布 J, 我们有积分形式的电流和磁场的关系：

$$\oint_L \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \bullet d\vec{S}$$

取一个很小的面元 $d\vec{S}$,当 $d\vec{S}$ 趋近于 0 时，

$$\oint_L \vec{B} \bullet d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{B} \bullet d\vec{S}$$

由此得到：$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

另一种方法，可以利用磁感应强度与矢势的关系毕奥-萨伐耳（Biot-Sarvart）定律 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$，来推导出上述关系。

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) \\ &= \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}\end{aligned}$$

——（2.16）

首先分析第一项：

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}\,')}{r} \mathrm{d}V'$$

由于 ∇ 只对观察点 $\vec{x}$ 微商，则有

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \cdot \vec{J}(\vec{x}\,') \mathrm{d}V'$$

根据定义

$$r = \left|\vec{x} - \vec{x}\,'\right| = \sqrt{\left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2 + \left(z - z'\right)^2}$$

所以有

$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla' \frac{1}{r}\right) \cdot \vec{J}(\vec{x}\,') \mathrm{d}V'$$

利用数学公式：

$$\nabla\cdot\left(\varphi\vec{f}\right)=\left(\nabla\varphi\right)\cdot\vec{f}+\varphi\nabla\cdot\vec{f}$$

有

$$\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla'\cdot\left(\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\right)\mathrm{d}V'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

根据电荷守恒定律，<u>由于是讨论的恒定电流情况</u>，故有

$$\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}')=0$$

因此有

$$\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla'\cdot\left(\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\right)\mathrm{d}V'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\cdot\mathrm{d}\vec{S}'$$

此处的面积分对整个电流存在的区域。<u>在恒定电流的情况下，</u>区域的边界面上应无电流流进和流出，即在边界面上有电流密度应无法向分量，

$$\vec{J}(\vec{x}')\cdot\mathrm{d}\vec{S}'=0$$

从而得到

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

——（2.17）

计算式（2.16）中的第二项:$\nabla^2\vec{A}(\vec{x})$

根据矢势$\vec{A}(\vec{x})$的定义

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla^2\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V'$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{x}')\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}V'$$

由于

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{r}).$$

上述的被积函数只可能在 $\vec{x}=\vec{x}'\left(\vec{r}=0\right)$处才可能不为零。这样在被积函数中可令

$$\vec{J}\left(\vec{x}\right)=J\left(\vec{x}'\right)$$

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{x})=-\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J}(\vec{x})\int\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J}(\vec{x})\int\nabla'\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J}(\vec{x})\oint\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}'$$

根据$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}'$，同时在计算 $\oint\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}'$时可取$\vec{x}$ 作为坐标原点，从而得到

$$\oint\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}'=-4\pi$$

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{x}) = -\mu_0 \vec{J}(x)$$

——（2.18）

磁场的旋度可表示为:

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(x)$$

——（2.11）

利用 Stokes 公式

$$\oint_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_S \nabla \times \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

得到对应公式(2.11)的积分形式：磁感应强度对一个闭合回路 L 的线积分为：

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

——（2.10）

推论：

a) 磁场为无源有旋场; 磁感应线为闭合线, 无起点和终点；

b) 不同于静电场，磁场为非保守场；电流激发的磁场以涡旋形式出现；

c) $\nabla \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(x)$ 只有在恒定的情况下成立；

d) 而 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 在一般的情况（如随时间变化的非恒定）下也成立， $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0$ 。

7、 补充说明：

1）运动电荷在磁场的作用下做圆周运动；假设电荷沿着一个半径为a的环形路线运动，形成稳定的电流i，定义磁矩

$$\vec{m} = i\vec{S} = \pi i a^2 \vec{n}$$

假设$a^2 \to 0, i \to \infty, ia^2 \to \text{finite}$，此即所谓理想分子环形电流模型。

2）分子环形模型也称为磁偶极子模型。

之所以这样称呼，不是因为可能存在一对靠近的正、负磁荷（孤立的磁荷目前实验上还没发现！），而是因为（在静磁场一章我们会看到）分子环形电流模型在空间的矢势为

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

式中，$\vec{r}$为从圆心指向场点的位矢。这个公式在形式上与（纯）电偶极子的电势的表达式$\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$具有某种对应特征；

3）还可以证明，磁偶极子周围的磁感应强度$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla\times\vec{A}(\vec{x})$的形式为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{m}}{r^3}\right]$$

再一次看到，磁偶极子周围的磁感应强度的表达式形式与电偶极子周围的电场的表达式也非常类似：

$$\vec{E}=-\nabla\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r-\vec{p}}{r^3}\right]$$

从这些表达式的相似性，可以看出描述电场与磁场一些物理量之间具有某种对称性。

下面把电偶极子和磁偶极子的相关物理量的表达式做一个比较，便于大家加深印象：

	（静止）电荷	（稳）电荷流
源	ρ	$\vec{J}$
偶极子	(纯)电偶极子 $\ell\to 0, q\to\infty, ql\to \text{finite}$	(纯)磁偶极子 $a^2\to 0, i\to\infty, ia^2\to \text{finite}$
偶极矩	电偶极矩 $\vec{p}=q\vec{\ell}$	磁偶极矩 $\vec{m}=i\vec{S}\left(=\pi ia^2\vec{n}\right)$
势	标势 $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$	矢势 $\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$
场	$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r-\vec{p}}{r^3}\right]$	$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r-\vec{m}}{r^3}\right]$

4)对于物理上的载流线圈(电流和线圈的半径都是有限值)，其在远场产生的矢势除了最主要的磁偶极子贡献项 $\vec{A}^{(0)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$ 外，还存在更高阶的修正项（在静磁场一章会

讨论）。

作业

1：郭硕鸿《电动力学》（第三版）P35 页，习题 10。

2：试由稳恒电流产生的磁场的 Biot-Sarvart 定律：

$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'$，推导出安培环路定理：

$\nabla\times\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0\vec{J}(x)$.