§2 相对论的基本原理

本节的主要内容：

一． 相对论的基本原理

二． 同时的相对性

三． 光速不变原理的数学表达式

四． Lorentz变换

一、相对论的基本原理

1、爱因斯坦提出**相对论两条基本原理：**

- **相对性原理**
- **光速不变原理**

(Sommerfeld曾对此做过评价：“The principle of the constancy of the velocity of light is of course contained in Maxwell’s equations.”)

1）惯性参照系：

自由粒子在其中做匀速运动的坐标系为惯性系。

2）相对性原理：

① **物理规律**对所有的惯性参照系都可以表示为相同的形式；

② 无论是力学现象，还是电磁现象，都无法觉察所处参照系的绝对运动。

3）光速不变原理

真空中：

① 光速与光源的运动无关；

② 与光的传播方向无关；

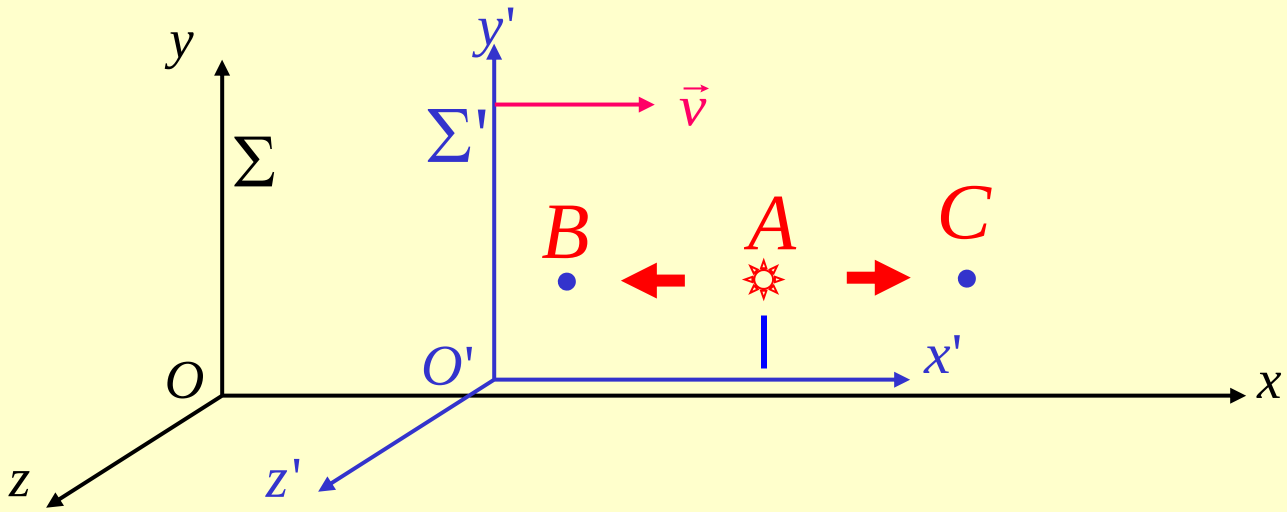
③ 在不同的惯性参照系中观测到的光速相同。

根据爱因斯坦的基本假设，可以得到以下的三个重要推论：

- 同时的相对性（The relativity of simultaneity）
- 运动时钟延缓 （时间膨胀，time dilation）
- 运动尺度缩短（Lorentz收缩，Lorentz contraction）

二、同时的相对性

一个光讯号从 A 点出发，问：到达 B 和 C 两个接收器的时间差



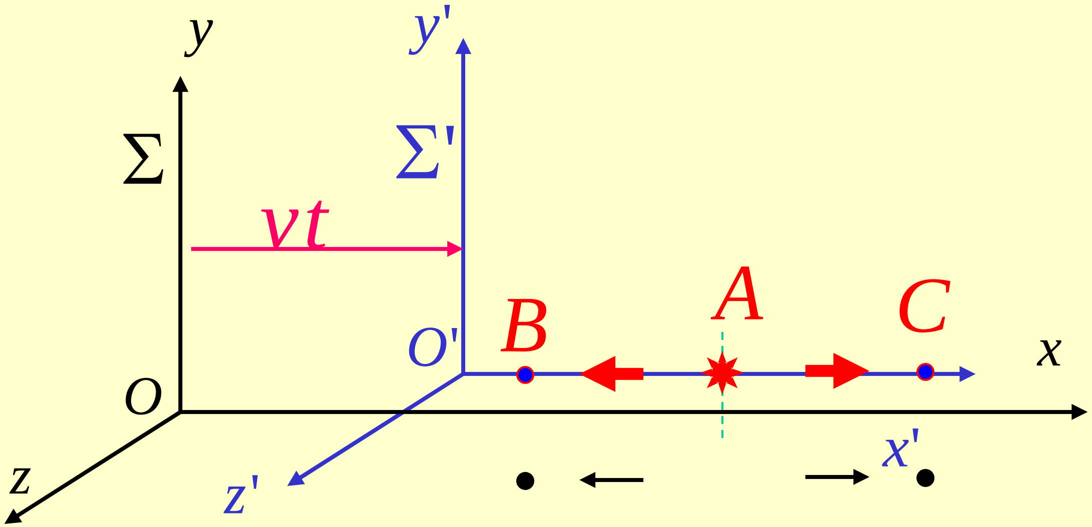
① 设 Σ’ 系相对于 Σ 系沿着 x（x’）轴向右运动；

② B 和 C 是 Σ’ 中 x’ 轴上与 A 等距离的两个接收器。

$$x' = x - vt$$

1）如果采用伽利略变换

➢ 处在 Σ’ 系观测者来说，从A点发出的光讯号向左右运动的速度相同，将同时到达B和C。



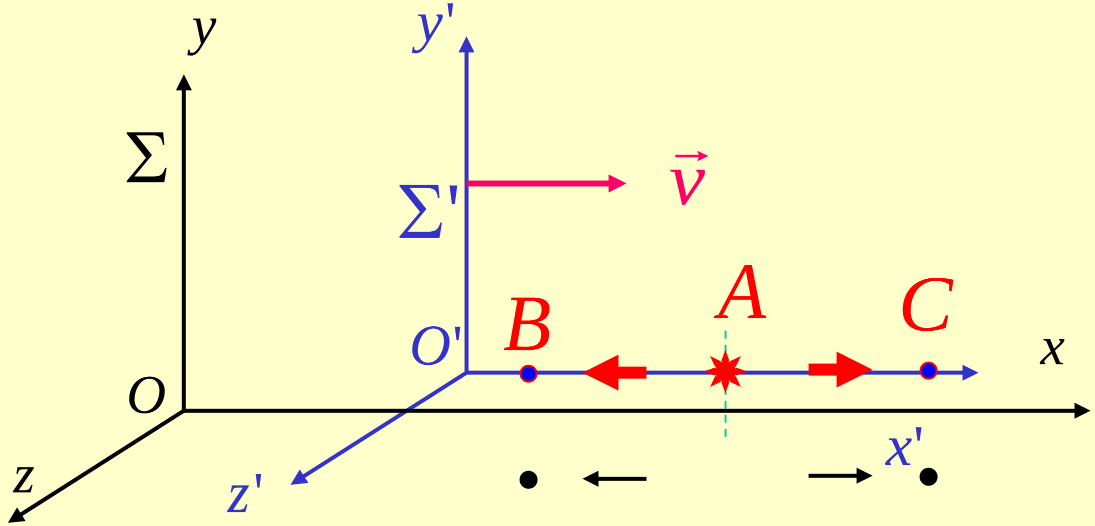
➢对处在 Σ系的观测者来说，

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} - \vec{v}$$

从A点发出的光讯号，由于向左、右运动的速度不同，将同时到达B和C两接收器；

2）根据爱因斯坦的相对性原理

尽管光源做匀速度运动，但在 Σ 系中光传播的速度总等于 c；



结果：在Σ系中，光讯号到达B比到达C接收器为早！

- B接收器运动的方向与光讯号的传播方向**相向运动**；
- C接收器运动的方向与光讯号的传播方向**同向运动**；

3）结论：

① 在某个参照系中**同时**发生的两个事件，对另一个惯性参照系来说并**不是同时**的——**同时性是相对的**。

② 时间不是一个与空间坐标独立无关的

③ 由于电磁波这样的物质运动速度是光速，导致涉及电磁运动的相对论效应非常显著；

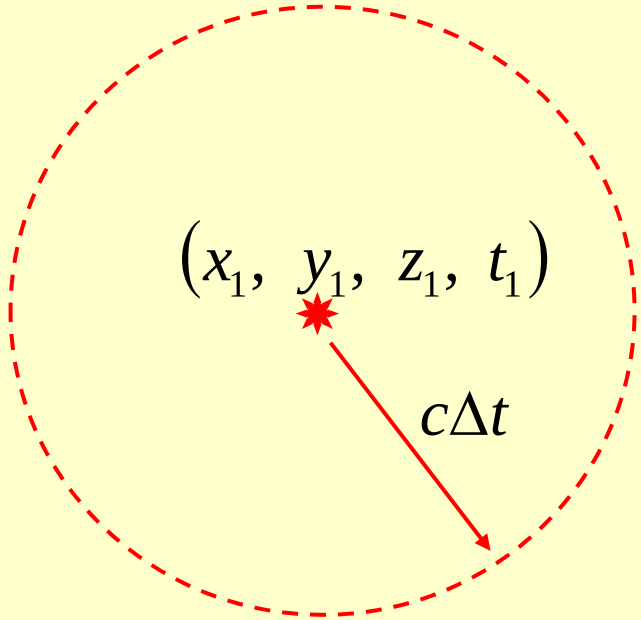
④ 后面我们看到，当物体的运动速度远小于光速时，这种差异是及其微小的，就过渡到“绝对时间的概念”

三、光速不变原理

1、事件的间隔

1）在Σ参照系：

光讯号在某个时刻从空间某一地点发出，经过一段时间后到达另一地点。

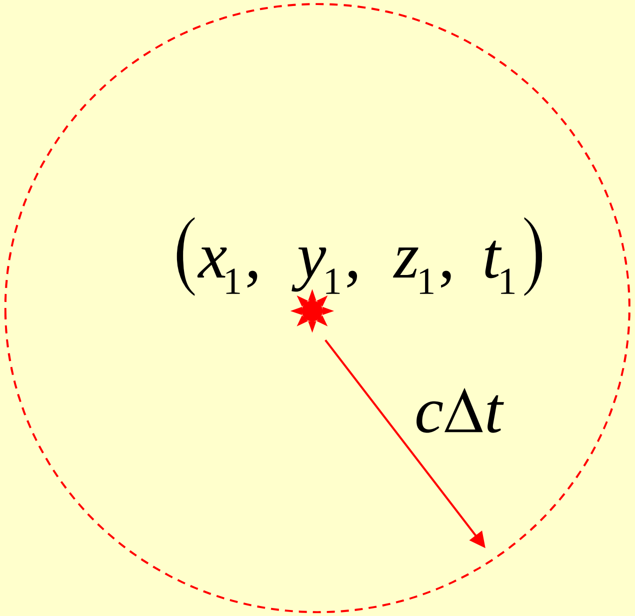


事件1：讯号的“发出” (x_1, y_1, z_1, t_1)

事件2：讯号的“到达” (x_2, y_2, z_2, t_2)

① 光讯号经过的距离：

$$c\Delta t = c(t_2 - t_1)$$



② 在 Σ 参照系中，波阵面方程：

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0$$

——这是在 Σ 参照系中这两个事件的**时空关系**。

2）在Σ’参照系观测到：

① Σ’ 系相对于 Σ 系做匀速度运动（惯性系）：

事件1： 讯号的“发出”$(x_1', \; y_1', \; z_1', \; t_1')$

事件2： 讯号的“到达”$(x_2', \; y_2', \; z_2', \; t_2')$

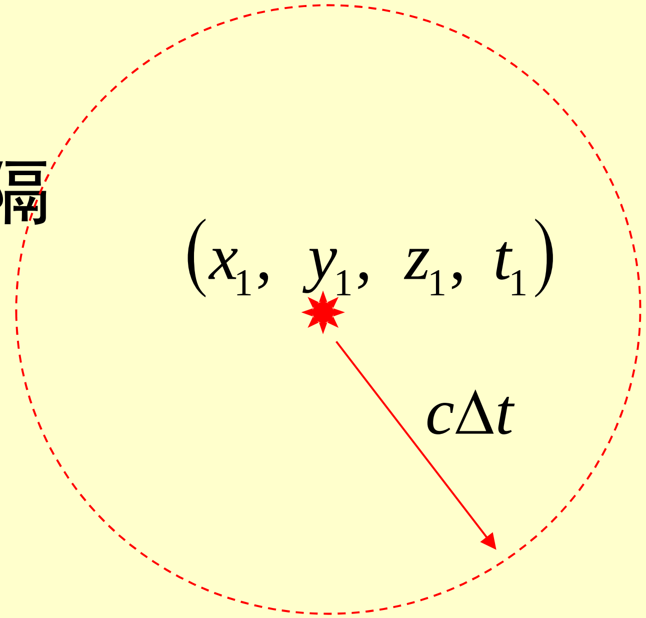
② 光讯号经过的距离为：$c(t_2'-t_1')$

③ 在 Σ’ 参照系波阵面的方程为

$$c^2(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2-(y_2'-y_1')^2-(z_2'-z_1')^2=0$$

3）定义任意的两个事件之间的间隔

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$



4）推论：

① <u>对于光讯号传播</u>，讯号的“发出”和讯号的“到达”这两个事件的间隔为零；

② 如果两个事件在某个参照系中的间隔为零，则在任何参照系中的间隔均为零；

③ 一般地，对于任意的两个事件，间隔不等于零。

2、间隔的变换：光速不变原理

任何两个事件的间隔，在变换到任何一个惯性系时是不变的——**光速不变原理的数学表达形式**

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}s'$$

式中：ds为在 Σ系中间隔的微分； ds'为在Σ’ 系中间隔的微分。

四、空时坐标在不同惯性系中的变换形式

——Lorentz变换

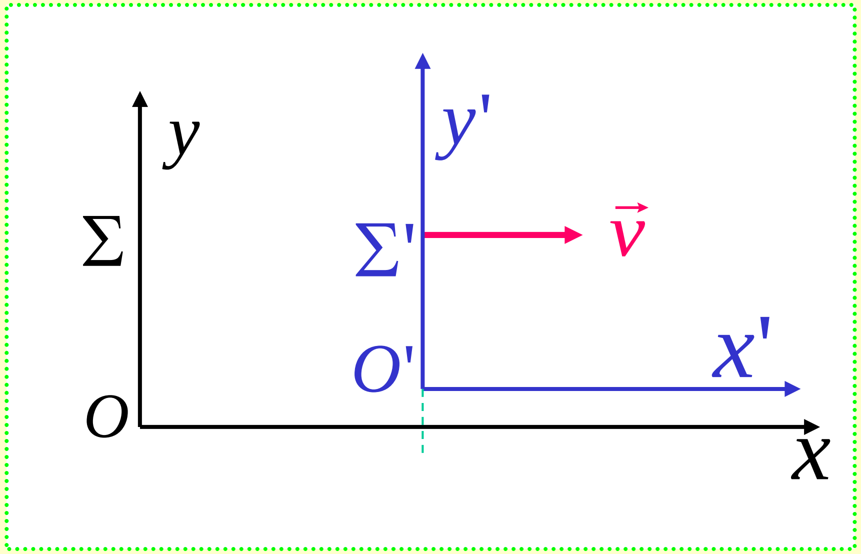
Hendrik Antoon Lorentz

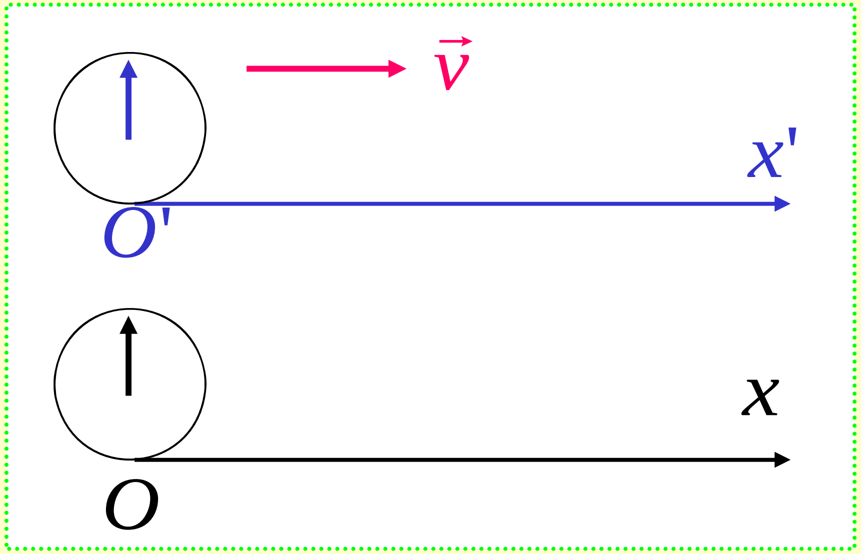
(18 July 1853 – 4 February 1928)

- a Dutch physicist who shared the 1902 Nobel Prize in Physics with Pieter Zeeman for the discovery and theoretical explanation of the Zeeman effect.
- derived the transformation equations subsequently used by Albert Einstein to describe space and time.

- 伽利略变换不遵守光速不变原理，不适用于相对论；
- 需要根据狭义相对论的基本原理，寻找两个惯性系之间的新的变换，以代替伽利略变换；
- 同时这种新的变换在v<<c的情况下，应该回到伽利略变换。

考虑这样的两个惯性参照系





事件1：

① 假设:两个参照系在它们的坐标原点正好重合时, 事件1发生；

② 此刻，位于它们原点处的两个时钟都指在零点;

$t = 0$ $t' = 0$

而后，发生了事件2：

Σ 系中的观测到的空时坐标：

$$(x,\ y,\ z,\ t)$$

Σ’ 系中的观测到的空时坐标：

$$(x',\ y',\ z',\ t')$$

1. 在两个参照系中，两个事件的间隔分别为

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$s'^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$s'^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

2. 在不同惯性系中，空、时坐标变换的线性关系

$$x' = a_{11}x + a_{12}ct,$$

$$ct' = a_{21}x + a_{22}ct,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z$$

$$x' = a_{11}x + a_{12}ct,$$
$$ct' = a_{21}x + a_{22}ct$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

1）由间隔的不变性，得到

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$
$$= (a_{21}x + a_{22}ct)^2 - (a_{11}x + a_{12}ct)^2 - y^2 - z^2$$

或者

$$(ct)^2 - x^2$$
$$= (a_{21}^2 - a_{11}^2)x^2 + 2(a_{21}a_{22} - a_{11}a_{12})xct \; + (a_{22}^2 - a_{12}^2)(ct)^2$$

比较系数，得：
$$\begin{cases} a_{21}^2 - a_{11}^2 = -1, \\ a_{21}a_{22} - a_{11}a_{12} = 0, \\ a_{22}^2 - a_{12}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21}^2 - a_{11}^2 = -1, \\ a_{21}a_{22} - a_{11}a_{12} = 0, \\ a_{22}^2 - a_{12}^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11} = \sqrt{1+a_{21}^2} \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{22} = \sqrt{1+a_{12}^2} \end{cases}$$

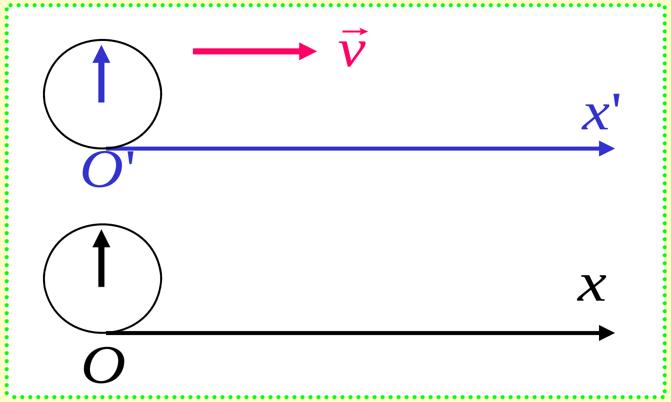
$$a_{12} = \frac{a_{22}}{a_{11}} a_{21} = \frac{\sqrt{1+a_{12}^2}}{\sqrt{1+a_{21}^2}} a_{21}$$

$$\frac{a_{12}}{\sqrt{1+a_{12}^2}} = \frac{a_{21}}{\sqrt{1+a_{21}^2}}$$

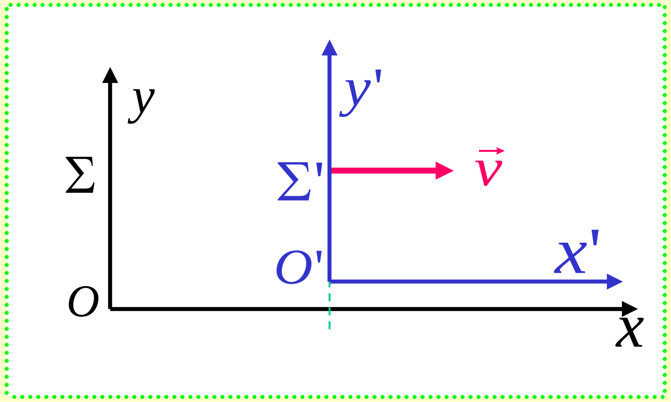
（四个未知数，三个方程！）

2）**初始条件**（<u>分析坐标原点</u>）

在 Σ 参照系中观测，Σ’ 参照系坐标原点 0’点的运动速度为 v，



则 $x = vt$



在 Σ’ 参照系中，0’点的运动速度始终为零，

$$x' = 0$$

$$x = vt, \qquad x' = 0$$

$$x' = a_{11}x + a_{12}ct,$$
$$ct' = a_{21}x + a_{22}ct,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z$$

$$\Rightarrow \quad 0 = (a_{11}v + a_{12}c)t,$$

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{v}{c}$$

联立求解得：

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{-v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

3）相对论的空时坐标变换公式：

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} (x - vt),$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right),$$

$$y' = y,$$

$$z' = z$$

上述变换称为**Lorentz变换**，它表示**同一物理事件在不同的参照系**中观测的空时坐标关系。

令：$\boxed{\beta = \frac{v}{c},}$

$$\boxed{\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt),$$

$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

$$y' = y,$$

$$z' = z$$

4）反变换的形式：

$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right), \quad y' = y, \ z' = z$$

$$\vec{v} \to -\vec{v}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &x = \gamma\left(x + \beta ct\right), \\ &t = \gamma\left(t + \frac{\beta}{c}x\right), \\ &y = y', \\ &z = z' \end{aligned}}$$

5）低运动速度情况

$$\beta=\frac{v}{c},\quad \gamma=1\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\boxed{v<<c,\beta\approx 0,\gamma\approx 1}$$

$$x'=\gamma\left(x-\beta ct\right)$$

$$t'=\gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right)$$

$$x'=x-vt$$

$$t'=t$$

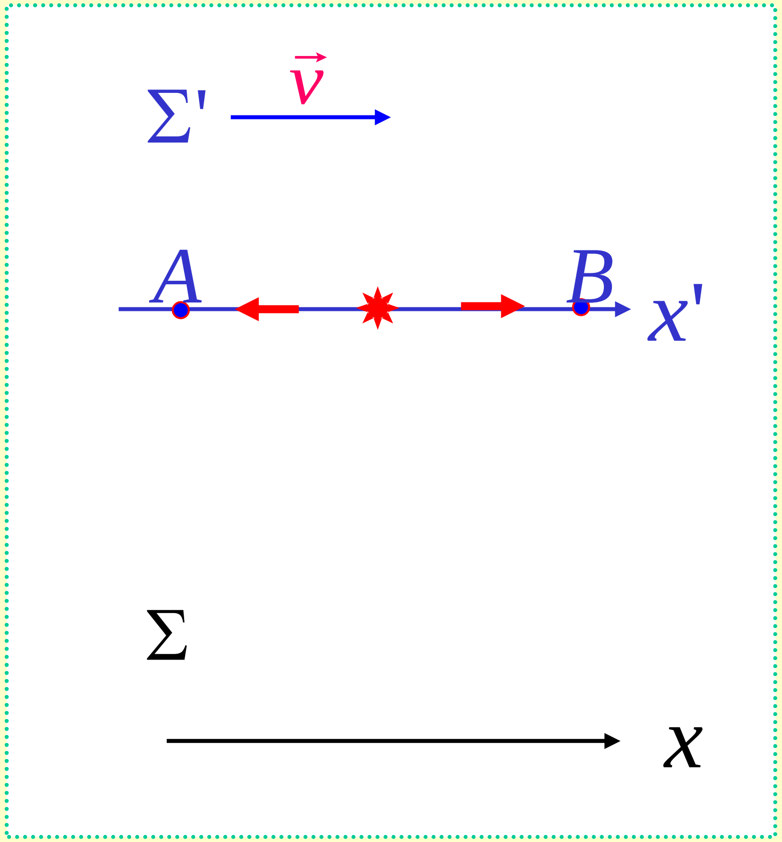
① 任何真实信号的速度都不能大于真空中的光速；

② 低速运动物体的空时坐标变换即为伽利略变换；

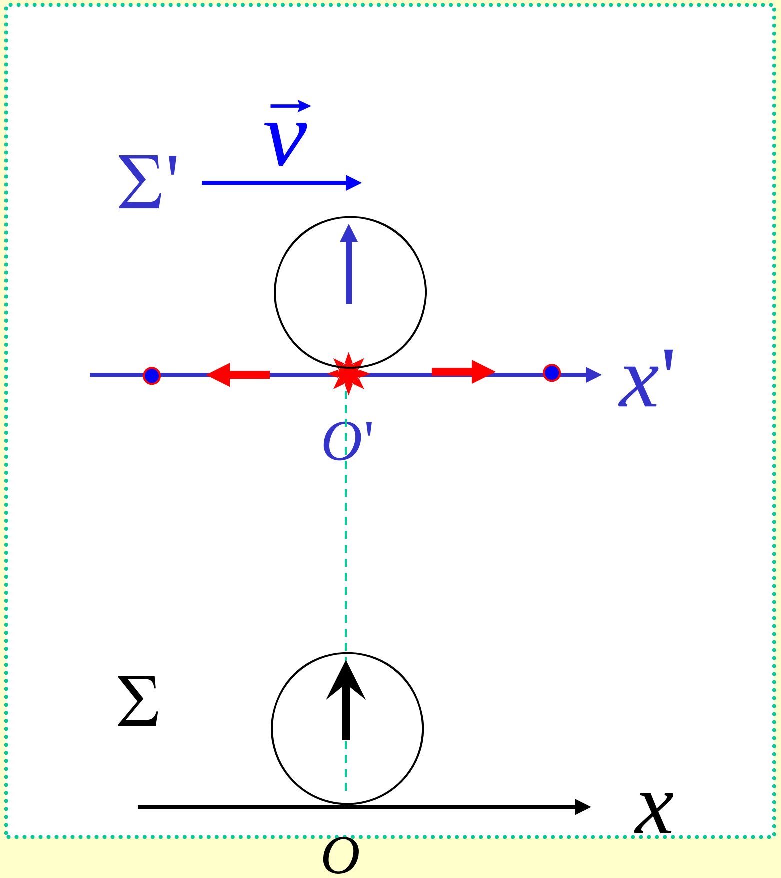
③ 日常生活中涉及到的速度都远小于光速，难以观测到相对论效应。因此，牛顿力学和伽利略变换都很好地描写了日常的物理现象；

④ 在粒子物理、高能物理领域，微观粒子的速度接近光速，几乎都需要用相对论来处理。

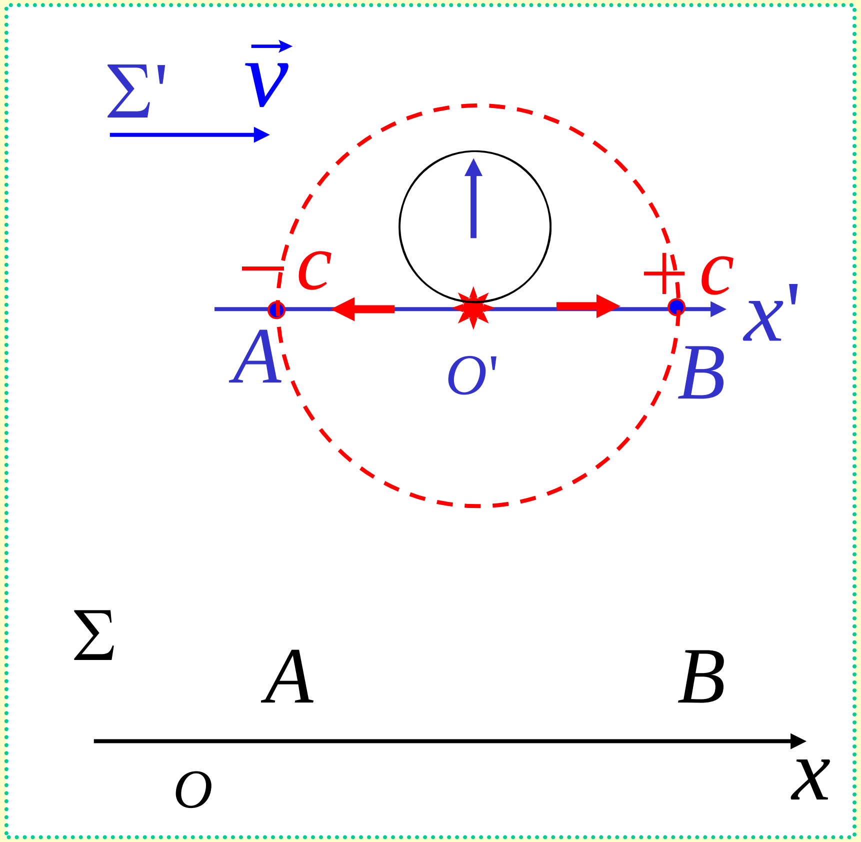
例题： Σ’ 系相对于 Σ 系以速度 v 沿 x 轴方向运动；设在 Σ’系中有一光源和与光源等间距的两个接收器。



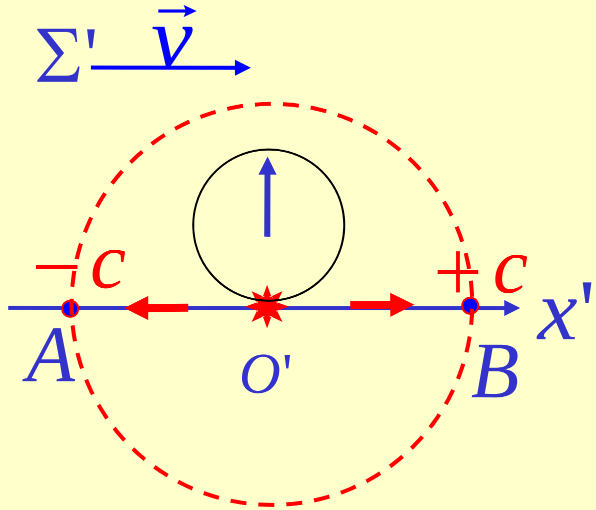
- 取光源所在的位置为Σ’系的坐标原点0’，发光时刻作为 Σ’ 系记时起点；
- 假设光源发光时刻，两个坐标系的原点重合，此刻也是 Σ 系的记时起点（t=0）



经过1秒后，光讯号到达半径为 c 的球面



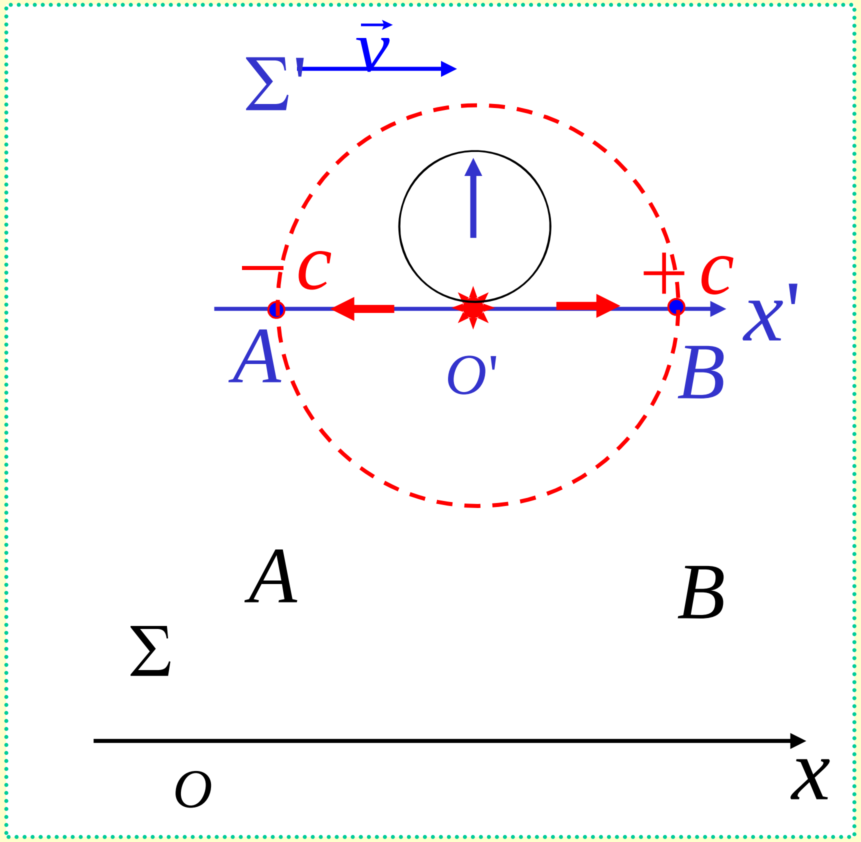
Σ’ 系中，处于此球面上的接收器A、B将同时接收到光讯号



Σ’ 系中，这两个事件的空时坐标分别为：

A：$\left(x_A',\ y_A',\ z_A',\ t_A'\right)=\left(-c,\ 0,\ 0,\ 1\right)$

B：$\left(x_B',\ y_B',\ z_B',\ t_B'\right)=\left(c,\ 0,\ 0,\ 1\right)$



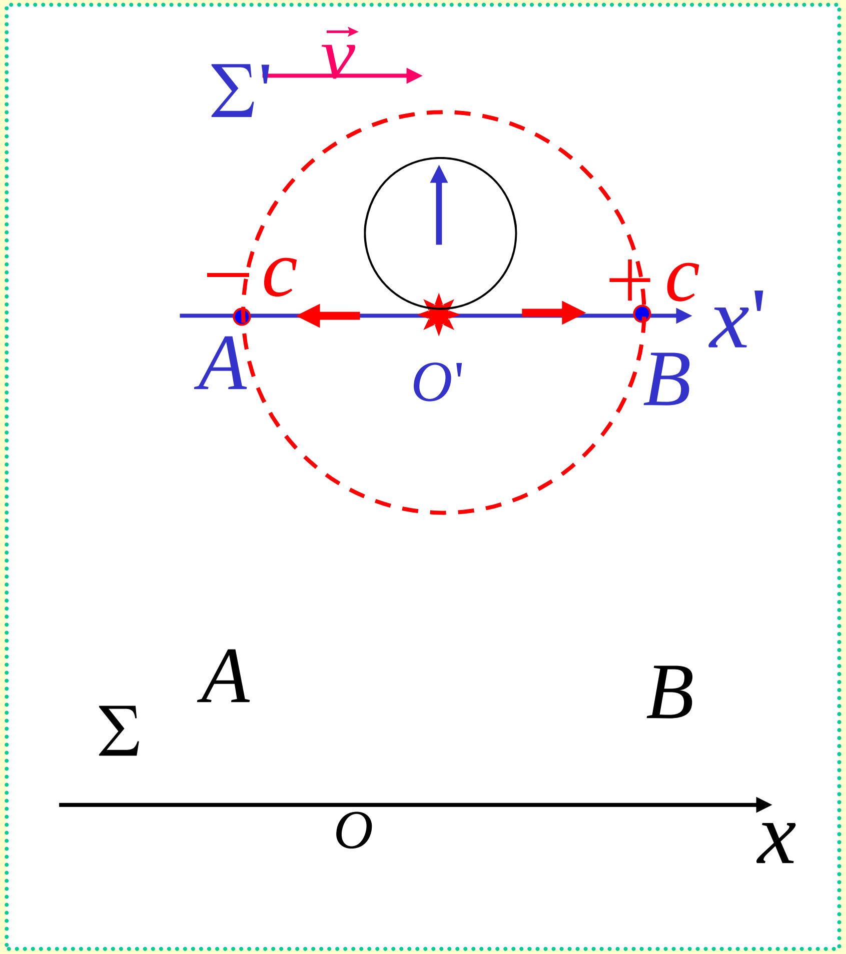
- 由于在Σ 系中光讯号的传播速度仍然为c ；
- 在 Σ系中的观测者观测到：光讯号到达接收器 A的时刻早于到达接收器B 的时刻。

Σ'系　A: $(-c,\ 0,\ 0,\ 1)$

B: $(c,\ 0,\ 0,\ 1)$

Σ 系　A: $(x_A,\ 0,\ 0,\ t_A)$

B: $(x_B,\ 0,\ 0,\ t_B)$



假设： Σ’ 系相对于Σ 系的运动速度为 v = 0.8c。

Σ’ 系中，事件A:$(-c,\ 0,\ 0,\ 1)$

Σ 系中，事件A: $(x_A,\ 0,\ 0,\ t_A)$

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\quad t=\frac{t'+\dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_A=\frac{x_A'+vt_A'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{-c+0.8c}{\sqrt{1-0.8^2}}=-\frac{c}{3}$$

$$t_A=\frac{t_A'+\dfrac{v}{c^2}x_A'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{1+\dfrac{0.8c\times(-c)}{c^2}}{\sqrt{1-0.8^2}}=\frac{1}{3}(\mathrm{s})$$

注意到：$\left|x_A/t_A\right|=c$，表示在Σ系中观测到光沿 x 轴反方向的传播速度仍然为 c 。

Σ'系中，事件B：$(c,\ 0,\ 0,\ 1)$

Σ 系中，事件B：$(x_B,\ 0,\ 0,\ t_B)$

$$x_B = \frac{x_B' + vt_B'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c+0.8c}{\sqrt{1-0.8^2}} = 3c$$

$$t_B = \frac{t_B' + \frac{v}{c^2}x_B'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1+\frac{0.8c\times c}{c^2}}{\sqrt{1-0.8^2}} = 3\,(\mathrm{s})$$

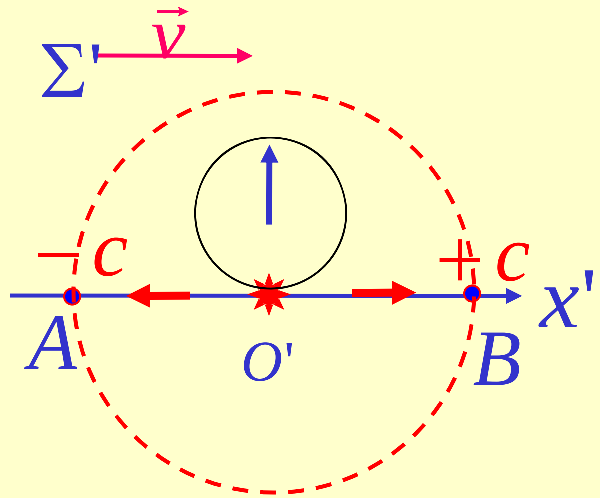
由于 $x_B/t_B = c$，表示在 Σ 系中观测到光沿 x 轴正方向的传播速度亦为 c。

信号到达探测器A, B两个事件的间隔：

在Σ’ 系中，有

$$\Delta t' = t_B' - t_A' = 0,$$

$$\Delta x' = x_B' - x_A' = 2c$$



两个事件的间隔为：

$$\Delta s'^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = -4c^2$$

$$x_A = -\frac{c}{3}$$

$$t_A = \frac{1}{3}(\mathrm{s})$$

$$x_B = 3c$$

$$t_B = 3(\mathrm{s})$$

在Σ 系中，有

$$\Delta t = t_B - t_A = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}(\mathrm{s}),$$

$$\Delta x = x_B - x_A = 3c + \frac{c}{3} = \frac{10}{3}c$$

两个事件的间隔为

$$\Delta s^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

$$= \left(\frac{8}{3}c\right)^2 - \left(\frac{10}{3}c\right)^2 = -4c^2$$

结论：

① 在Σ’系中同时发生的两个事件在另一个参照系Σ 中不再同时；

② 同时是相对的（依赖于参照系）；

③ 在不同的参照系中任意两个事件的间隔相同；

④ 不但在不同的参照系（有相对运动）中测得的时间差不同；而且测得的A、B两点的距离亦不同——距离也是相对的（依赖于参照系）

⑤ 注意：在 Σ 系中的距离实际上是在不同的时刻测量得到的位置的差值，与长度的定义不同）；

$$x_A = -\frac{c}{3} \qquad t_A = \frac{1}{3}(\mathrm{s})$$

$$x_B = 3c \qquad t_B = 3(\mathrm{s})$$