§3 相对论的时空理论

一. 相对论的空时结构

二. 因果律和相互作用的最大传播速度

三. 同时的相对性

四. 运动时钟的延缓

五. 运动尺度的缩短

六. 速度变换公式

爱因斯坦提出相对论两条基本原理：

- 相对性原理

① 物理规律对所有的惯性参照系都可以表示为相同的形式；所有惯性系都是等价的；

② 无论是力学现象，还是电磁现象，都无法觉察所处参照系的绝对运动。

- 光速不变原理

真空中：

① 光速与光源的运动无关；

② 与光的传播方向无关；

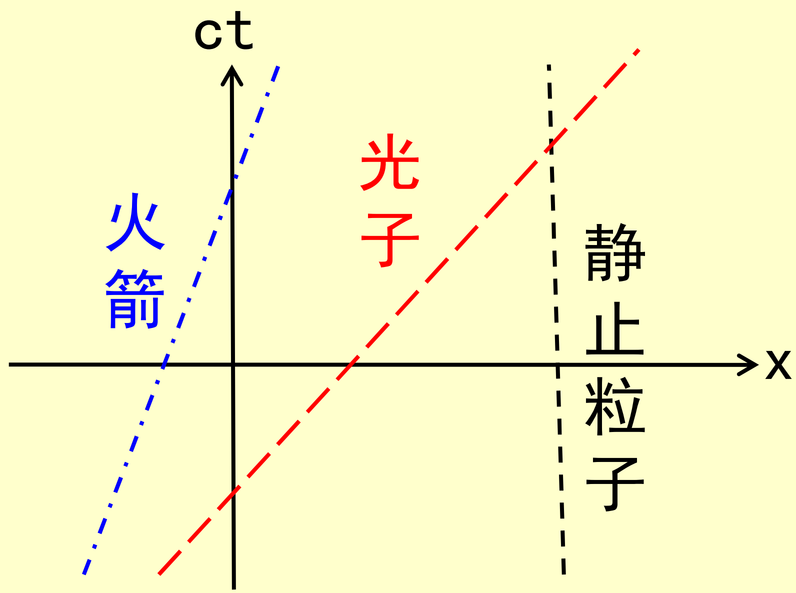
③ 在不同的惯性参照系中观测到的光速相同。

根据爱因斯坦的基本假设，可以得到以下的三个重要推论：

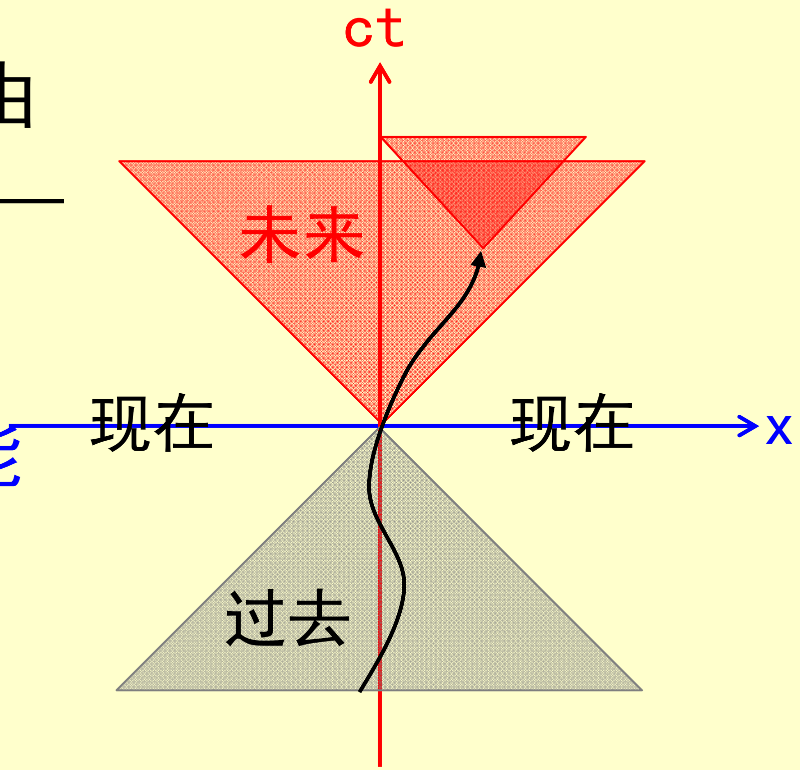
- 同时的相对性（The relativity of simultaneity）
- 运动时钟延缓 （时间膨胀，time dilation）
- 运动尺度缩短（Lorentz收缩，Lorentz contraction）

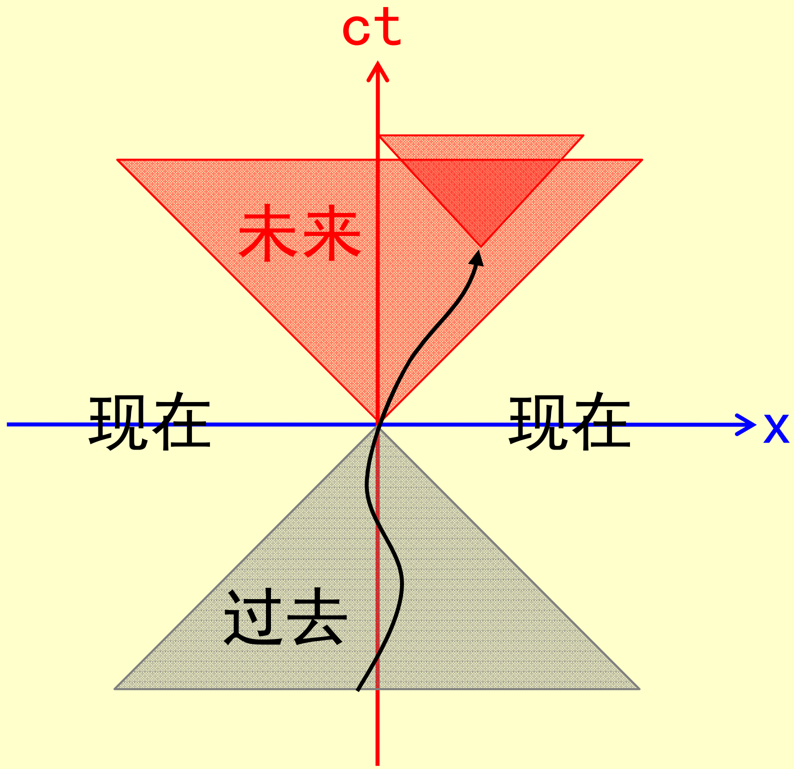
一、相对论的空时结构

- 通常，选横坐标表示时间t，纵坐标表示位置x表示粒子的运动，斜率就表示速度；
- <u>在相对论中，通常是用水平轴表示位置x，而用垂直轴表示时间ct;</u>
- 在这样坐标系下 ，静止的粒子、光子、和一个火箭的运动表示如右图（闵可夫斯基Minkowski图）



- 在闵可夫斯基图中，一个运动粒子的运动轨迹就是所谓**世界线**（**world line**）；
- 假设在t=0时刻，你从坐标原点出发了。由于任何物体的运动速度都不可能超过光速，你的世界线的斜率不可能小于1；
- 因此，你的运动范围限于由两条45°线构成的劈形区域——**“你的未来”**。
- 区域中的每个点是你未来能够到达的空时区域。





- 在阴影区域以外的空时部分，称之为“广义的现在”，你既不可能来自于那里，也不可能到达那里；
- 尽管那里是一个巨大的空时区域，目前的情况下也无法影响那里所发生的事情（如果有！）

四、运动时钟的延缓

1. 时钟
2. 固有时间
3. 时间延缓效应
4. 时间延缓效应的相对性

1、时钟

① 自然界中，许多物理过程可以作为记时的基准（例如，分子、原子振动的周期）；

② 所有这些自然基准，都可以称为时钟；

例如“秒”的国际基准，是采用铯133原子的基态能级之间跃迁辐射的周期来定义的；

① 在不同的参照系中，可以采用同一种物理过程作为计时的基准，这样就可以比较不同参照系上的时间。

④ 处于 Σ’系的某**静止物体**内部，相继发生两个事件（如，分子振动一个周期的起点和终点）；

⑤ 在 Σ’系中的观测者观测到两个事件发生的时刻分别为 t_1' 和 t_2'。

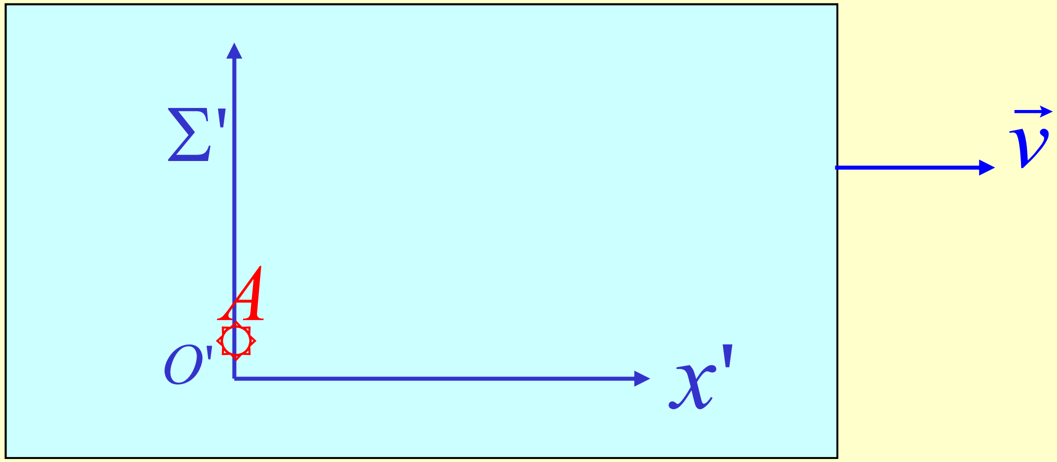
时间为 $$\Delta\tau = t_2' - t_1'$$

问题：同一个物理过程的时间在不同的参照系中的关系如何？

2、固有时间 $\Delta\tau$

① $\Delta\tau$ 为在该物体的静止坐标系中测得的时间

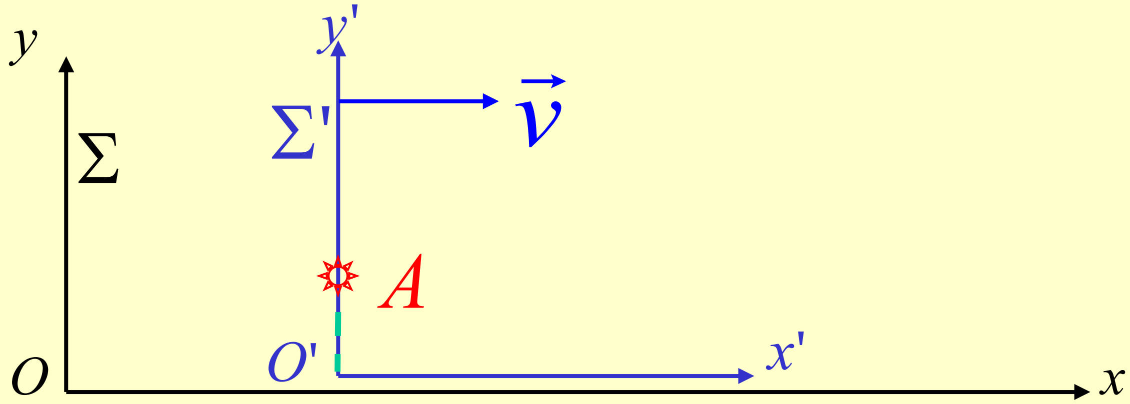
——称为该物理过程的**固有时间**。



② 由于这两个事件发生在**同一地点**，两个事件间隔为

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta\tau)^2$$

3、时间延缓效应



1）处于 Σ 系中的观测者观测到该物体在运动；在 Σ 系中的观测者看来：两个事件并不发生在同一个地点。

假设观测到的两个事件的空时坐标分别为

事件1： $\left(x_1,\ y,\ z,\ t_1\right)$

事件2： $\left(x_2,\ y,\ z,\ t_2\right)$

2）这两个事件的间隔为

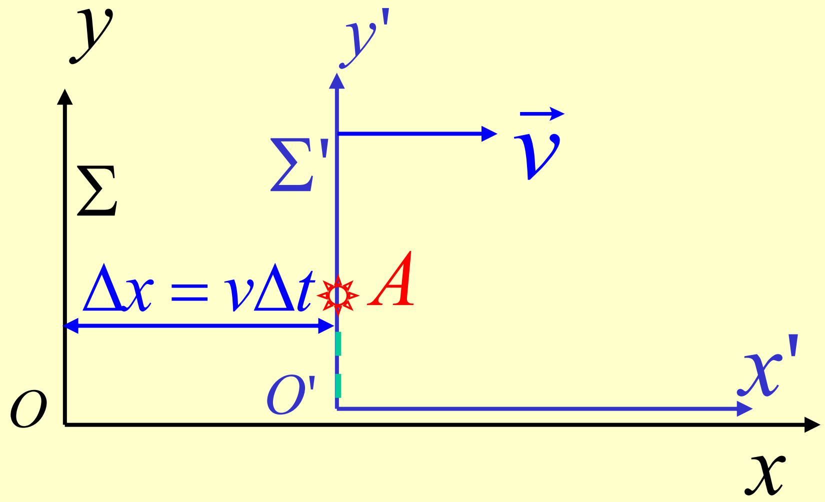
$$
\begin{aligned}
(\Delta s)^2 &= c^2\left(t_2-t_1\right)^2-\left(x_2-x_1\right)^2 \\
&= c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2
\end{aligned}
$$

根据间隔的不变性，得到

$$c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2=c^2(\Delta\tau)^2$$

另一方面，

$$\Delta x = v\Delta t$$



从而得到：在 Σ 系中的时间为

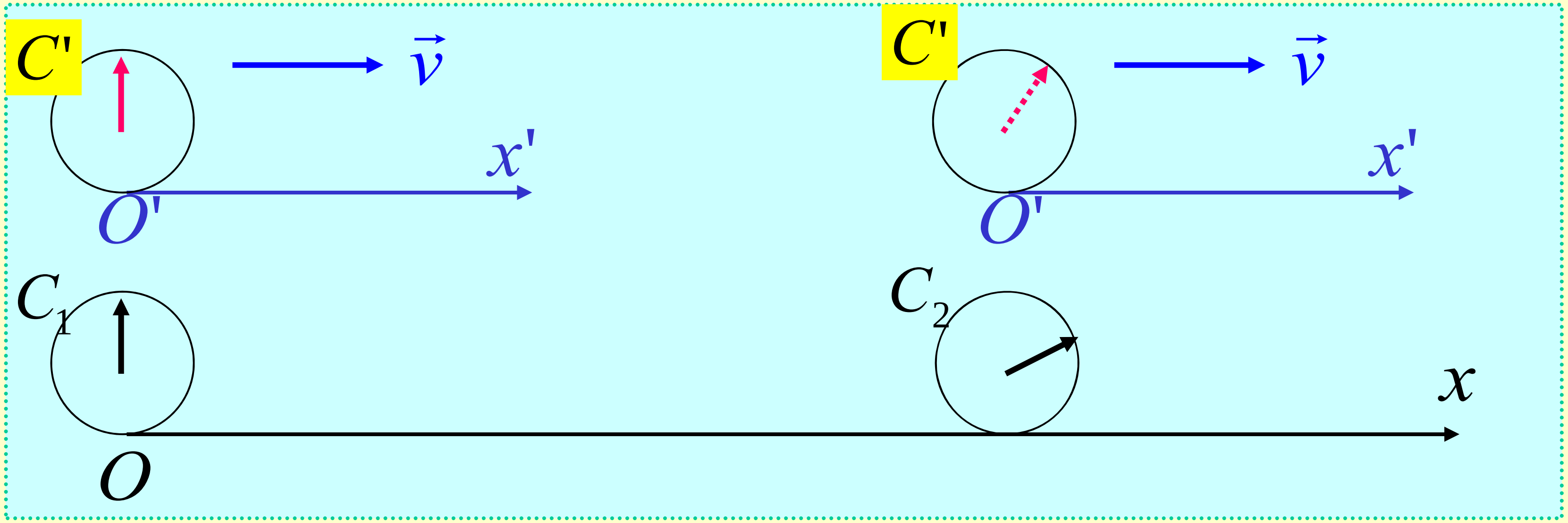
$$\Delta t=\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}\Delta\tau=\frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

3）结论：**时间的延缓效应**

① Δt ＞Δ τ ，表示在Σ系观测到的运动物体上发生的自然过程比起静止物体的同样过程延缓了；

② 运动的物体的速度愈大，所观测到的它内部的物理过程进行得愈缓慢。



站在 Σ 参照系上观测者得出，与时钟 C_2 相比，固定于Σ'系上的时钟 C' 变慢。

4）时间延缓效应的实验事实：

① 宇宙射线中有一种 ↗介子，它的准静态寿命为 $\Delta\tau = 2.2\times10^{-6}$ s， 介子以接近光速的速度飞向地面；

② 在地面上用乳胶法可以找到介子这样的实验事实可以用时间延缓效应来解释。

a) $\Delta\tau$ 是在相对于静止的参照系中观测到的**固有时间**；

b) Δt 介子相对于地球运动，则在以地球为参照系测得的寿命为：

$$\Delta t = \Delta\tau \Big/ \sqrt{1-(v/c)^2}$$

c）以地球为参照系，μ 介子一生所能飞行的平均距离：

$$\ell = v\Delta t = 0.995c \times \frac{2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-0.995^2}} = 6600\ \text{m}$$

- **需要注意：**以地球为参照系观测到的平均寿命为 Δt；
- 则对于那些速度达到 v=0.995c的 μ介子，其飞过的平均路程为6600m；
- 如果以 μ介子为参照系Σ’（既相对μ介子静止），则其一生所走过的距离为

$$\ell_0 = 2.2\times10^{-6}\times0.995c = 660\text{m}$$

- 问题：如果在参照系Σ’上观测，是不是意味着μ介子不能够到达地球？

原子钟及频率偏差

- 原子放电灯可发射谱线，而谱线的波长（频率）依赖于原子的能级；若能级在eV量级，则发射的是可见光（10^{15}Hz），能级间距更小时可以发射出微波（10^{10} Hz）。
- 这些信号可以作为支配原子钟快慢的标准（原子钟）. 例如，“秒”的国际基准是采用铯133原子的基态能级之间跃迁辐射的周期来定义的。
- 原子处于热运动，在实验室观测到的频率(f)由于时间膨胀而不同于在它的静止参照系中的辐射频率（f_0）。

$$\Delta t = \Delta\tau \Big/ \sqrt{1-(v/c)^2}, \qquad f_0 = \frac{1}{\Delta\tau}, f = \frac{1}{\Delta t}$$

$$f = f_0\sqrt{1-(v/c)^2}, \quad \delta f = f - f_0 = \left[\sqrt{1-(v/c)^2} - 1\right] f_0$$

原子钟的相对频移：

$$\frac{\delta f}{f_0} = \sqrt{1-(v/c)^2} - 1 \approx -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \boxed{= -\frac{1}{2}\frac{Mv^2}{Mc^2}}$$（M为原子的质量）

原子的热运动能：

$$\frac{1}{2}Mv^2$$

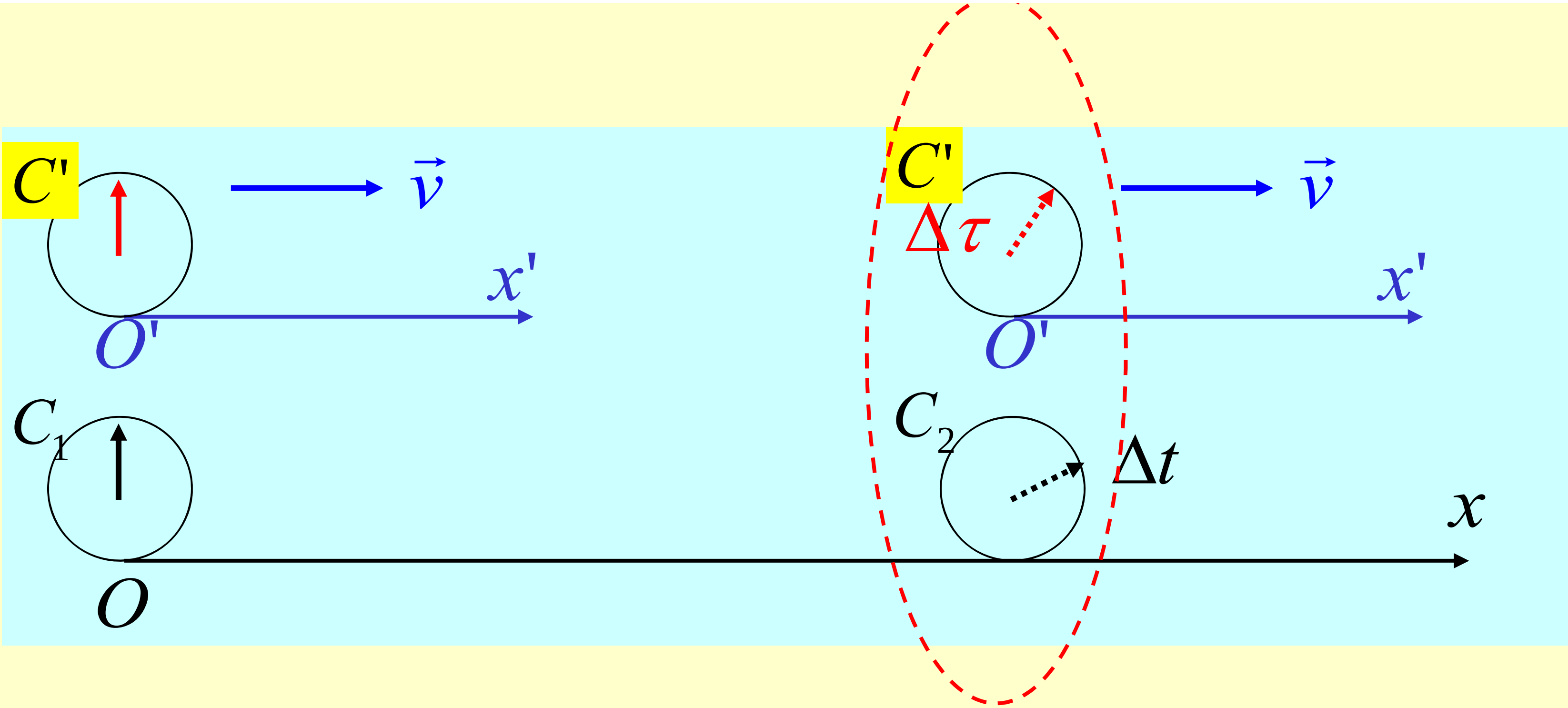
根据热力学：

$$\frac{1}{2}M\left\langle v^2 \right\rangle = \frac{3}{2}kT$$

- 因此可根据原子所处的温度，计算出原子钟的频率偏差；
- 反过来，根据所需要达到的频率精度，亦可计算出需要将原子冷却到的温度。

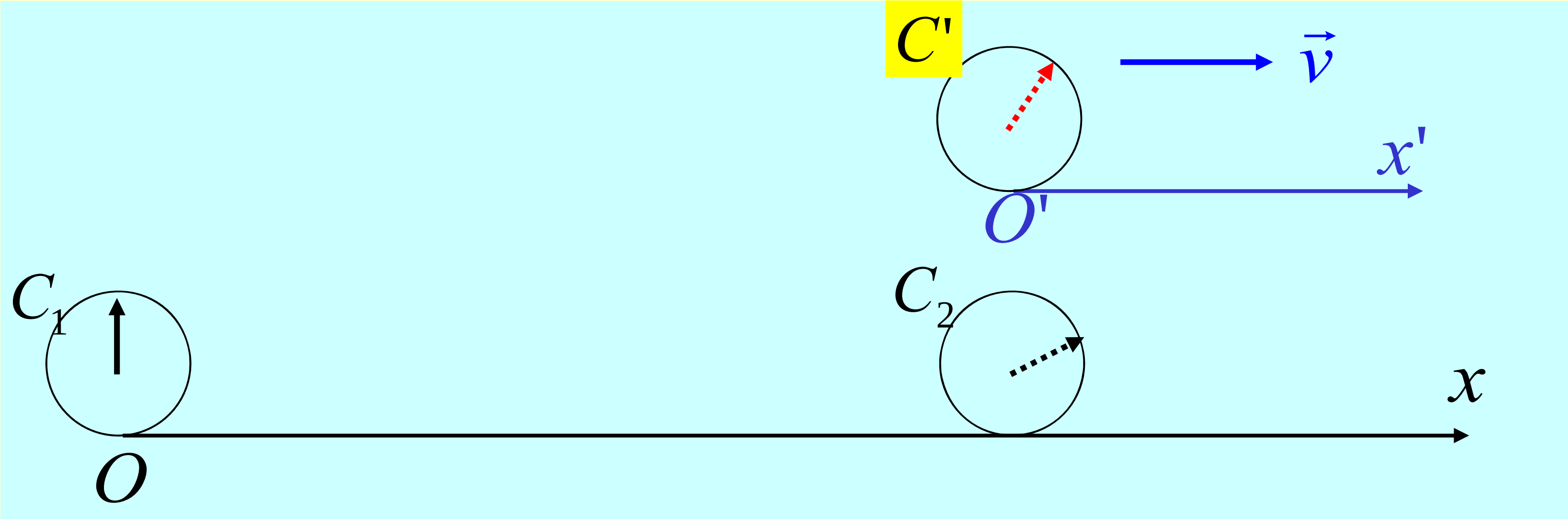
To ben continued

4、在匀速度运动情况，时间延缓效应是相对的



已得出的结论：站在 Σ参照系上观测，与时钟 C_2 相比，固定于 Σ'系上的时钟 C' 变慢；

注意：Σ参照系上观测者下这个结论时，已经在 Σ参照系上把C1与C2进行了校准。



问题：站在Σ’系上，与时钟 C’相比，固定于Σ系上的时钟 C_2 似乎变快！与相对性相矛盾？

回答：

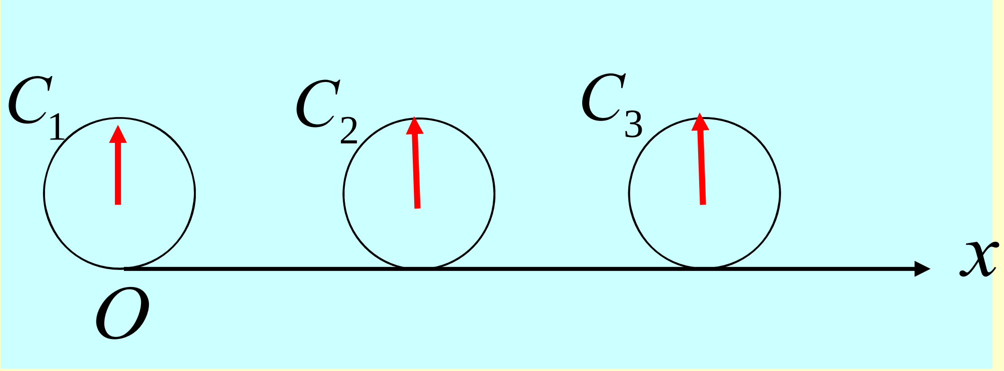
与相对性不矛盾！

在参照系 Σ’上看，固定于 Σ系上的时钟也变慢！

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

1）时钟的校准

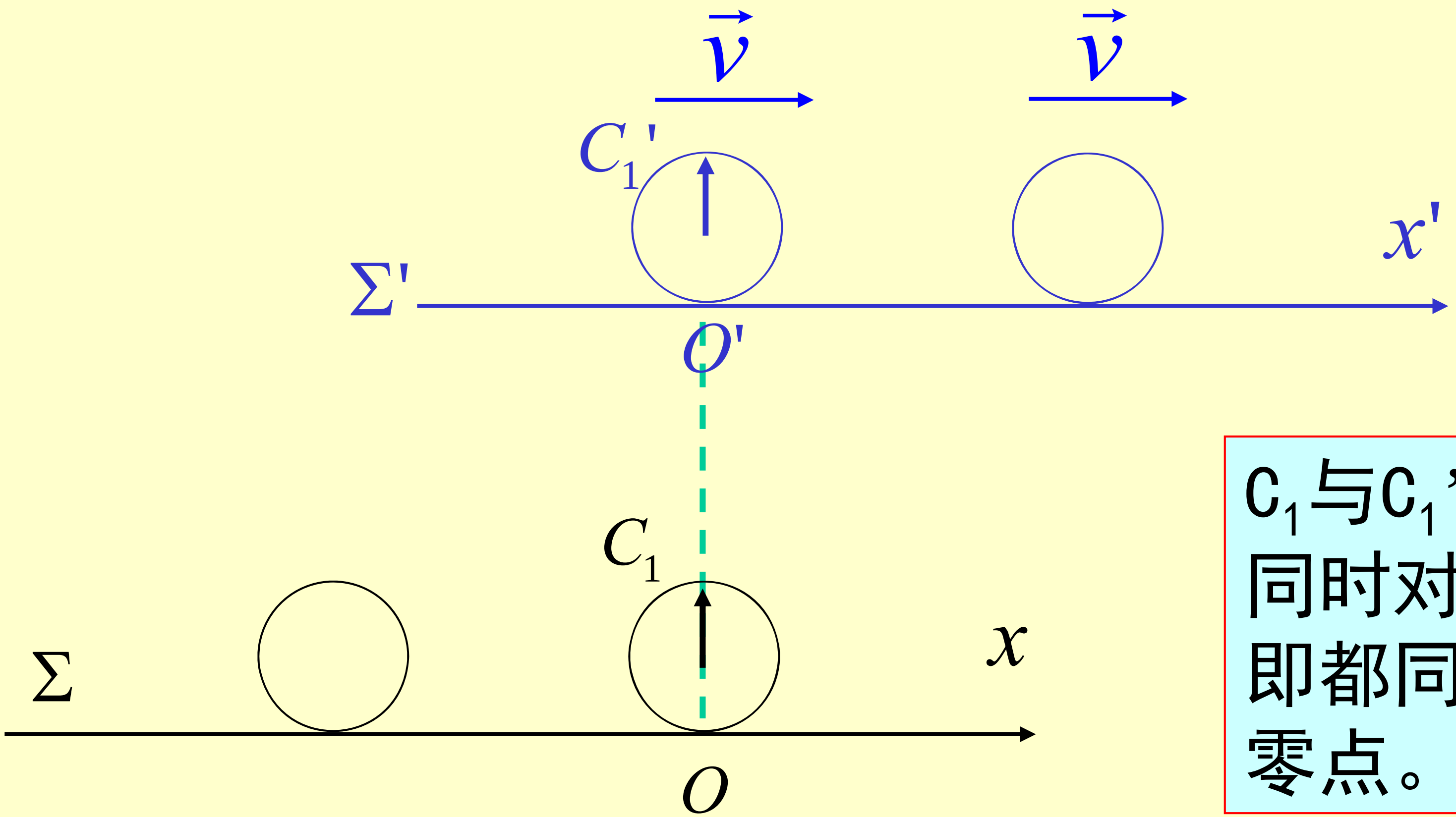
① 固定在同一个参照系中的各个时钟，相互之间没有运动，可以同时校准。



不同位置上的时钟，由于相互无运动（因固定同一个参照系中），则可**同时校准**！

② 对于位于有相对运动参照系的坐标原点上的两个时钟，当它们在空间位置重合时，可以相互校准（同时）；

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



C_1与C_1’是可以同时对准的，即都同时指在零点。

$$t' = \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- 根据Lorentz变换，

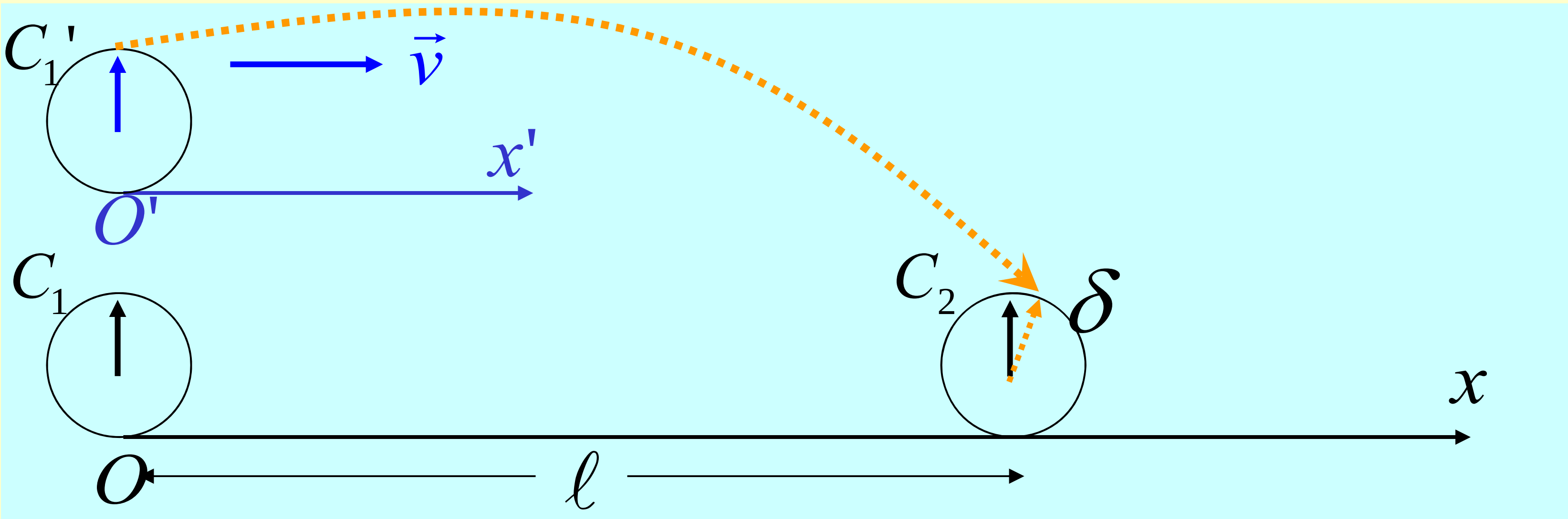
$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right)$$

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{\beta}{c} \Delta x \right)$$

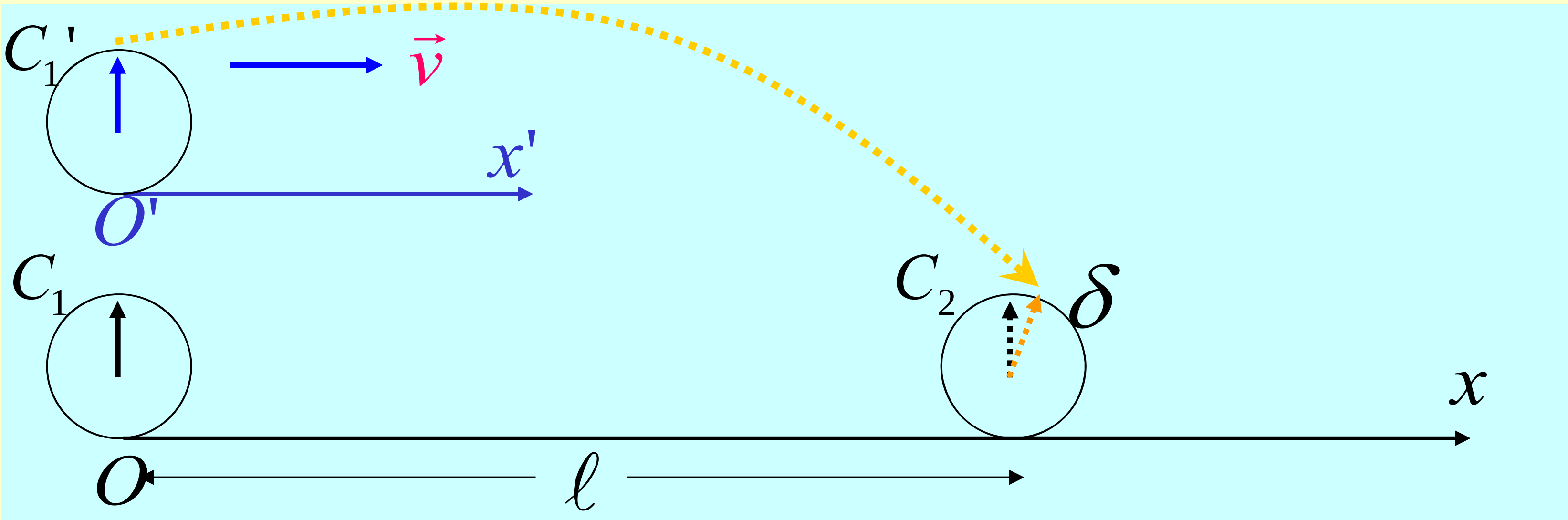
- 只有发生在一个参照系中同一位置的两个事件如果同时发生，则在另一个参照系来观测时则也是同时 ！

③ 由于同时的相对性，原来在Σ系上对准的时钟，在Σ’系上看来不是对准的；

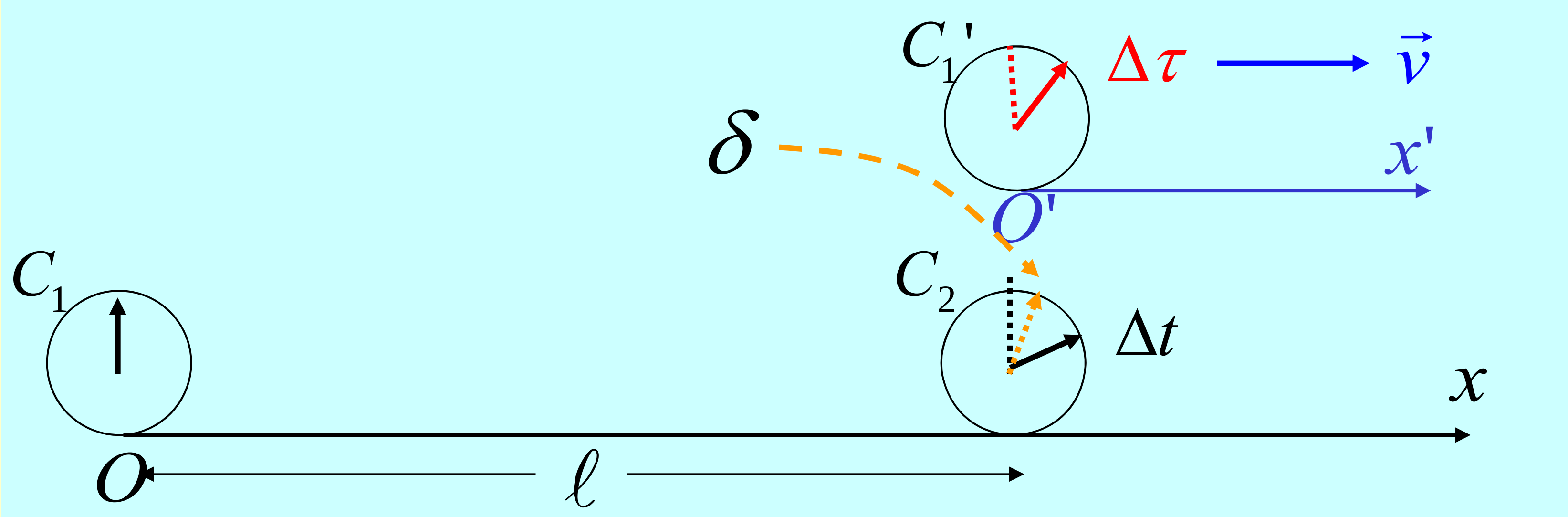
在Σ’系中的观测者在经过0点时，其实Σ系的时钟C_2指在时刻δ。



$$t' = \left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$



$$0 = \frac{\delta - \frac{v}{c^2}\ell}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \delta = \frac{v}{c^2}\ell$$



④ 当时钟 C_1’与时钟 C_2 的位置重合时，

- 在Σ’系中的观测者看到 C_1’指在 $\Delta\tau$;
- 当C_1’经过C_2正上方时，C_2 指在：

$$\Delta t = \frac{\ell}{v} = \Delta\tau \bigg/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

⑤ 因此，在 Σ’系中看：时钟 C_2 记录这样的两个事件的时间为

$$\delta = \frac{v}{c^2}\ell$$

$$\Delta t - \delta = \Delta t - \frac{v}{c^2}\ell = \Delta t - \frac{v}{c^2} v \Delta t$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \Delta \tau \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < \Delta \tau$$

结论：在 Σ’系中观测， 比起C_1’记录，用时钟 C_2 纪录这两个事件的时间，时钟 C_2 同样是变慢。

问题：一个宇航员在她21岁生日的那天，乘坐宇宙飞船，以12/13c的速度飞离地球，飞行了五年之后，她掉头返回地球，与其家中的孪生弟弟团聚。**问：**团聚时他们各自是多大岁数?

解：对于飞行的宇航员，在她看来，从离开到回到家所经历的时间是10年。因此她认为自己 Y1=31岁。

但是，对已地球上的时钟而言，运动的钟走慢了。在地球上的时间是

$$\Delta t = \Delta\tau \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 10 \Big/ \sqrt{1-\left(12/13\right)^2} = 26\left(\text{年}\right)$$

因此对于在地球上的孪生弟弟：Y2=47岁。

狭义相对论的运动学效应

A. 运动时钟变慢

B. 运动尺（棒）比静止时变短

- ➚介子的准静态寿命为 τ = 2.2×10^{-6} s；
- 以地球为参照系，观测到的平均寿命为 Δt；
- 若地面上观测μ介子的运动速度为v=0.995c，在地面上观测其飞过的平均路程为

$$\ell = v\Delta t = 0.995c \times \frac{2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-0.995^2}} = 6600\ \mathrm{m}$$

- 如果以 μ介子为参照系Σ'（既相对μ介子静止），观测其一生所走过的距离为

$$\ell_0 = 2.2\times10^{-6}\times0.995c = 660\mathrm{m}$$

- 问题：如果在参照系Σ'上观测，是不是意味着μ介子不能够到达地球？

五、运动尺度的缩短

1. 长度的自然基准：
2. 静止长度：
3. 运动物体的长度：
4. 运动物体的长度与静止长度之间的关系
5. 长度的缩短效应也是相对的

1、**长度的自然基准：**

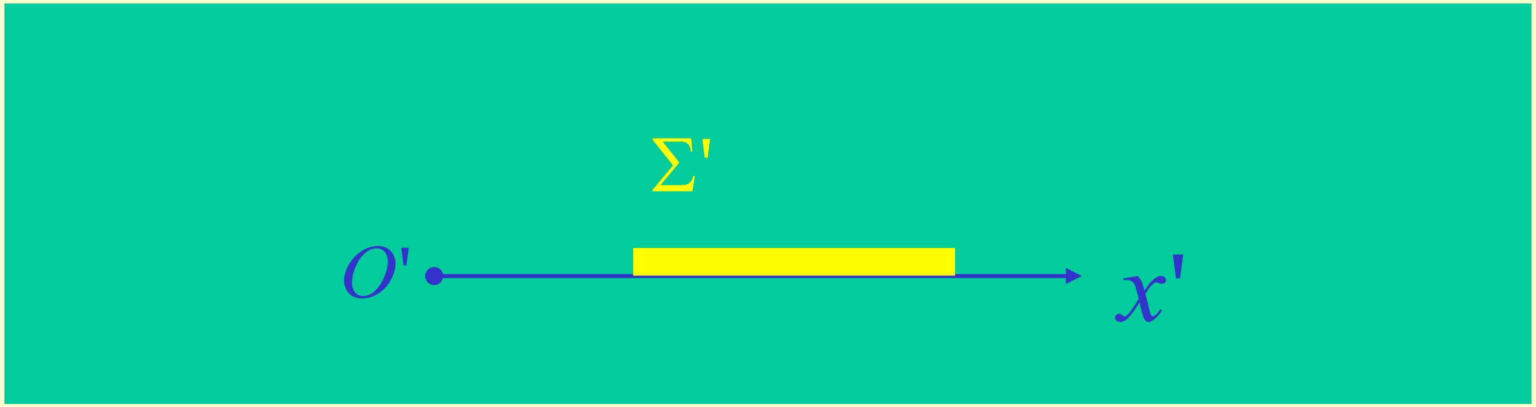
1）真空中，光在 1/299,792,458秒的时间内所经过的长度为1米；

2）由于在任何参照系中，光在真空中的传播速度都相同，因此在不同的参照系中都可以用这个尺度来度量长度；

2、静止长度：

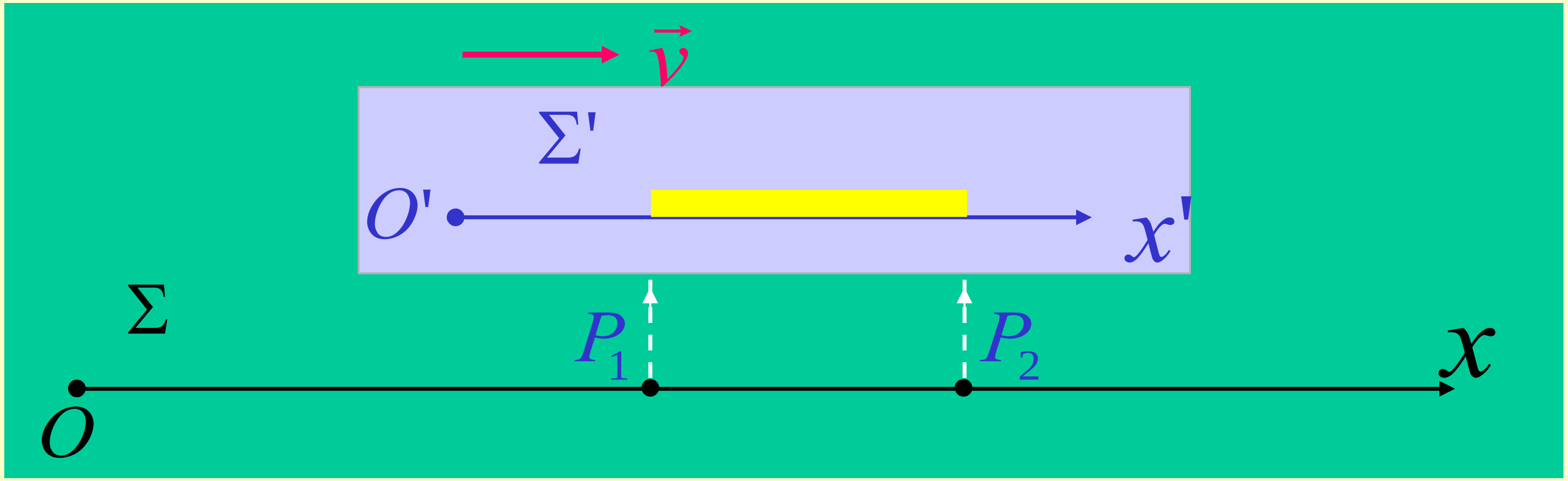
Σ’为固定于物体上的参照系；

静止长度为在 Σ’系中测量得到的长度。



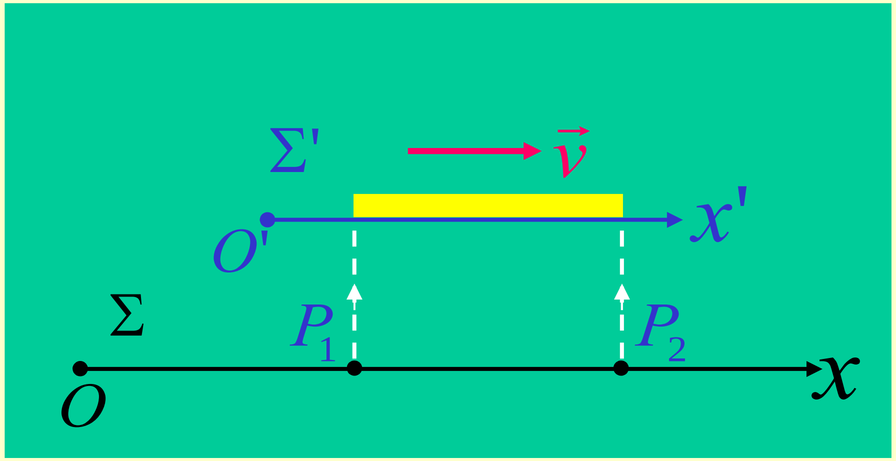
3、运动物体的长度：

如果在 Σ 参照系中的观测者观测到：物体的后端经过点 P_1（事件1）和前端经过点 P_2（事件2）两个事件同时发生，则定义P_1 、 P_2之间的距离为该运动物体在Σ 参照系中的长度



事件1：后端经过点P$_1$

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$



事件2：前端经过点P$_2$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

两个事件在Σ参照系中同时发生，因此

$$t_1 = t_2$$

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$t_1 = t_2$$

得到 $x_2' - x_1' = \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$,

在Σ’系中测量得到的静止长度为

$$\ell_0 = x_2' - x_1'$$

在 Σ系中测量运动物体的长度为

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

结论：运动物体的长度缩短了。

- ↗介子的准静态寿命为 $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ s；

- 以地球为参照系，观测到的平均寿命为 Δt；
- 地面上μ介子的运动速度为v=0.995c，
- 在地面上观测，其飞过的平均路程为

$$\ell = v\Delta t = 0.995c \times \frac{2.2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1-0.995^2}} = 6600 \text{ m}$$

- 如果以 μ 介子为参照系Σ'（既相对μ介子静止），观测其一生所走过的距离为

$$\ell_0 = 2.2\times10^{-6}\times0.995c = 660\mathrm{m}$$

- 假设：μ 介子为是在地面上方6000m的高空产生的；
- 在参照系Σ' 上观测，其到达地面所需要走的路程并不是6000m，而应该是

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 6000\times\sqrt{1-0.995^2} = 599m$$

说明：

① 动尺的长度缩短并不是因为尺的运动而造成的物理上的收缩，而是同时相对论的直接后果。

② 在 Σ系或Σ'系测量尺的长度，都必须在各自的坐标系中**同时**确定尺的两个端点坐标。

③ Σ系的同时在Σ'系看来并不同时；而Σ'系的同时在Σ系看来也不是同时。这就造成了动尺的缩短。

4、长度的缩短效应也是相对的

① 在Σ系中观测，固定于 Σ'系上的运动物体的长度缩短了；

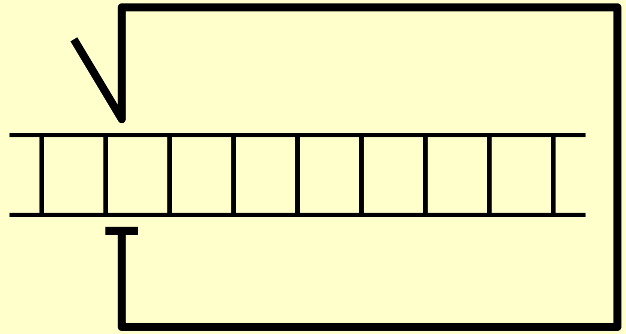
② 同样，在Σ'系中观测，固定于Σ系上的运动物体的长度也缩短了；

③ 在垂直于速度的方向上长度没有变化；

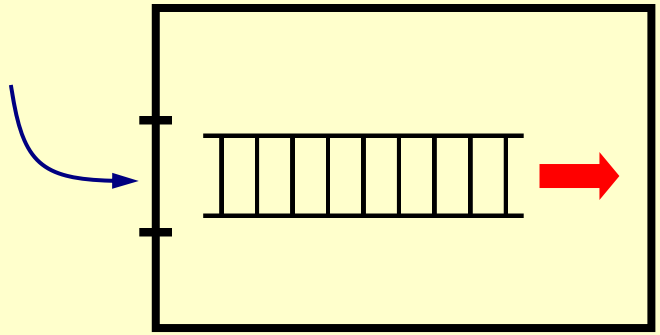
④ 与时间的延缓效应不同的是, 长度的缩短没有直接的实验验证。

储藏室与木梯悖论

① 农场主遇到的问题：木梯稍长些，储藏室放不进；

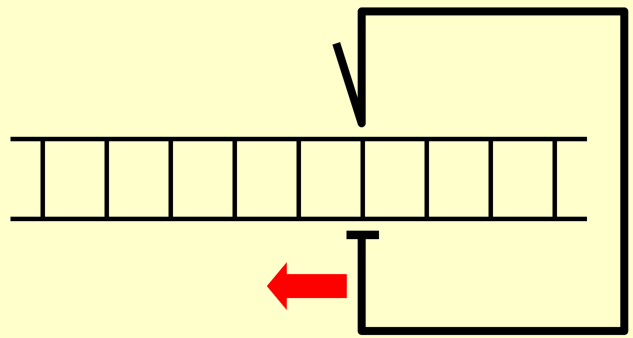


② 农场主：听说过爱因斯坦相对论，想出这样的点子：让女儿扛着梯子跑，他想只要运动足够快，一旦进了储藏间，他把门关上，就能把梯子放进储藏间了！



③ 女儿：读过相对论，对父亲的观点有异议。她认为即使她跑得再快，梯子还是放不进。

原因是，在她的参照系中，当她运动时，梯子的长度没有变化，但储藏间的尺寸在缩小。



谁对、谁错？梯子是放得进，还是放不进储藏间？

答案是：父亲和女儿的分析都对！

实际上这里牵涉到两件事：

A）梯子的末端进了储藏间；

B）梯子的前端撞上储藏间后墙

- 父亲的观点：A在B之前发生，所以他认为应该存在某个时刻，此时梯子全部处于储藏室内；
- 女儿的观点：B在A之前发生，所以不存在这样一个时刻梯子能全部处于储藏间内；

梯子能否放得进储藏室？有没有一个明确的答案

- “纠缠”一下这个问题，实际上牵涉到另一件事：当让这个梯子停下来之后会发生什么？
- 这个问题是的答案是不确定的（参见Griffiths,491页讨论）。

6、速度的变换公式

1）假设 Σ’相对于Σ沿 x 轴方向以速度 v 运动，Lorentz变换为

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

其微分形式分别为

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\mathrm{d}t = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\mathrm{d}t$$

$$dx' = \frac{u_x - v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dt$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1-\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dt = \frac{1-\frac{v}{c^2}u_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dt,$$

两式相除得

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1-\frac{vu_x}{c^2}}$$

$$\mathrm{d}t' = \frac{1-\frac{v}{c^2}u_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathrm{d}t$$

同样可得 $\mathrm{d}y' = \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z$

$$u_x' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_x - v}{1-\frac{vu_x}{c^2}},$$

$$u_y' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}},$$

$$u_z' = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}}$$

——相对论中的速度变换公式

2）速度反变换形式:

$$u_x'=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}=\frac{u_x-v}{1-\frac{vu_x}{c^2}},$$

$$u_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{u_x'+v}{1+\frac{vu_x'}{c^2}}$$

$$u_y'=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}=\frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}},$$

$$u_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{u_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vu_x'}{c^2}}$$

$$u_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{u_z'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vu_x'}{c^2}}$$

$$u_z'=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}=\frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}}$$

A. 当物质的运动速度v，u远小于光速时，惯性参照系之间的速度的变换关系过度到如下的形式：

$$u_x' = u_x - v$$

$$u_x = u_x' + v$$（经典力学的速度相加定理）

$$u_y' = u_y$$

$$u_z' = u_z$$

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u_y' = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u_z' = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{u_y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$$

$$u_z = \frac{u_z' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$$

B. 如果研究的对象是真空中的电磁波，

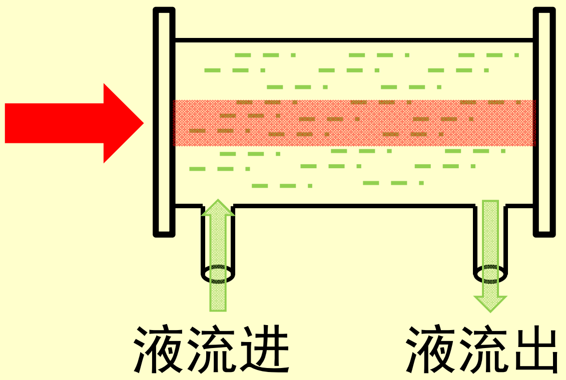
$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c$$

$$u_y = \frac{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}} = c\sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \neq c$$

$$u_z = \frac{u_z' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} = c\sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

C. 匀速运动介质中的光速

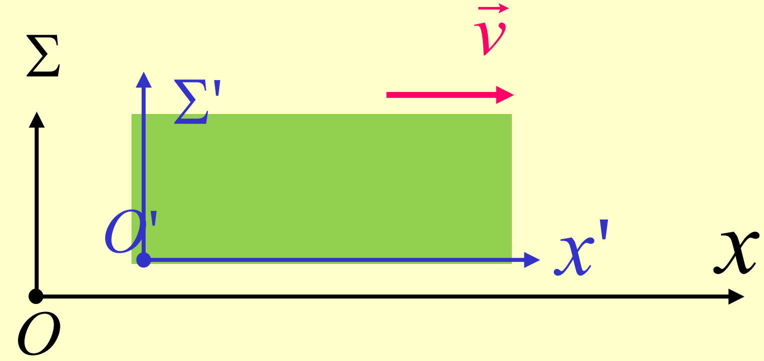
- 设介质沿 x 轴正方向运动，运动速度为 v；
- 选取Σ'参照系固定在介质上；
- 在该参照系中，观测到光沿各个方向上的速度均为c/n。（测量仪器随介质一起运动）



$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$$

在 Σ 参照系中观测到光沿 x 轴正方向的传播速度为

$$u_x = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{c}{n}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}}$$



光沿 x 轴负方向的传播速度为

$$u_{-x} = \frac{-\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot (-\frac{c}{n})} = \frac{-\frac{c}{n} + v}{1 - \frac{v}{nc}}$$

$$u_x = \frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{nc}}, \quad u_{-x} = \frac{-\frac{c}{n}+v}{1-\frac{v}{nc}}$$

讨论：

1）如果 n = 1 ，则

$$u_x = u_x' = c$$

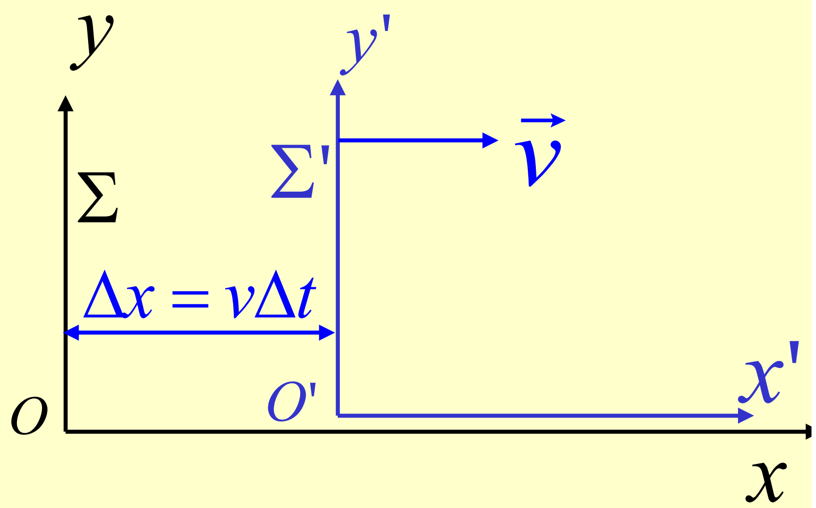
真空中，光沿着任何方向的速度均为c。

2）在　v<< c时，保留到 v 的一级近似项

$$u_x \approx \left(\frac{c}{n}+v\right)\left(1-\frac{v}{nc}\right) = \frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v, \quad u_x > \frac{c}{n}$$

$$u_{-x} \approx -\frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v, \quad u_{-x} < \frac{c}{n}$$

相对论的空时坐标变换公式：



$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},}$$

$$\boxed{t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= y, \\ z' &= z \end{aligned}}$$

Lorentz变换：表示**同一物理事件**在**不同的参照系**中观测的空时坐标之间的关系。

令:

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c},}$$

$$\boxed{\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

$$y' = y,$$

$$z' = z$$

$$ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right),$$

$$\beta = \frac{v}{c},$$

$$\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$x' = \gamma x - \gamma\beta ct$$

$$ct' = \gamma ct - \gamma\beta x$$

Lorentz变换改写成如下的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Lorentz变换改写成如下的矩阵形式:

$$\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$x' = \gamma x - \gamma\beta ct$$

$$ct' = \gamma ct - \gamma\beta x$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix}$$

逆变换改写成如下的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix}$$