上次课要点

- ✓ 电荷守恒定律: $\nabla\cdot\vec{J}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$
- ✓ 稳恒电流产生的静磁场可以表示成矢势的旋度：

$$\vec{B}(\vec{x})=\nabla\times\vec{A}(\vec{x})$$

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V'$$

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{x})=-\mu_0\vec{J}(x)$$

- ✓ 静磁场是无源场 $\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x})\equiv 0$ 。这一结论可以推广到非稳恒的磁场：

$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x},t)\equiv 0$$

- ✓ 分子环形电流（磁偶极子）：

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\left(\vec{m}\cdot\vec{e}_r\right)\vec{e}_r-\vec{m}}{r^3}\right]$$

~~~~~~

§3 麦克斯韦方程组

Oersted 在 1819 年发现，通电的导线能够影响到附近磁针的指向的实验告诉人们：电流能够产生磁场。

当时科学家就思考是否存在逆向效应，即通过磁场能否产
~~~~~~

生电流这一科学问题。

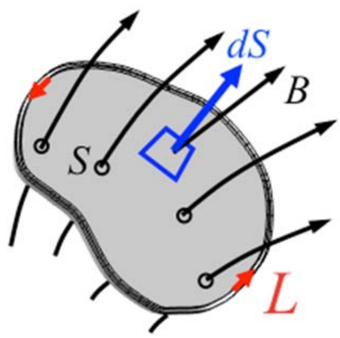
1831 年，英国实验物理学家、化学家 Michael Faraday 在实验上发现了电磁感应现象。英国理论物理学家 James Clerk Maxwell 则善于根据前人的发现，并把这些实验现象和规律进行概括总结，提出新的假设，在 1865 年建立了统一的电磁场理论：电场和磁场作为统一的整体；电荷激发电场，电流激发磁场，变化的电场和磁场互相激发。

1、 Faraday 电磁感应定律

1) 现象：当磁场发生变化时，附近的闭合线圈中有电流通过；闭合线圈中的感应电动势与通过该线圈内部的磁通量的变化率成正比。

2) 定量关系：

- 首先选定闭合线圈的绕向（具有任意性）
- 定义磁通量：闭合线圈所围的曲面的面元正法线方向与线圈的绕向成右**旋关系**；



$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\ ;$$

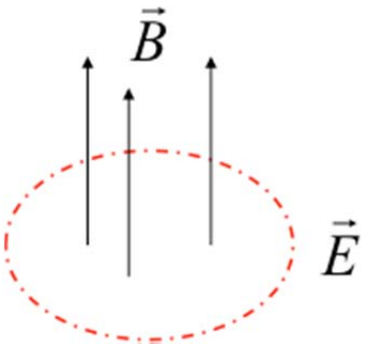
- 实验观察：当通过线圈的磁通量增加时，线圈上的感应电动势与选定的积分回路的绕向相反

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

——（3.1）

4) Faraday 电磁感应现象的本质：

- 线圈内电荷运动形成电流，是由于电荷直接受到该处电场的作用而产生的；
- 线圈中感应电流的出现表明空间存在电场——感应电场；
- 变化的磁场在周围空间激发电场——电场与磁场互作用的一个方面。



$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

5) 电磁感应定律的微分形式：

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

——（3.3）

说明：

- 微分形式是一种（电）场与（磁）场的关系；这种关系并不依赖于导体回路（线圈）是否存在。导体回路只不过使感应得到的电场以电流的形式表现出来而已。

- 静止电荷所激发的静电场

$$\nabla \cdot \vec{E}_{static}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E}_{static}(\vec{x}) = 0\text{；}$$

特点：有源、无旋性：

- 感应电场是有旋场；

$$\nabla \times \vec{E}_{induced}(\vec{x},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t}$$

- 在一般的情况下，电场由这两部分叠加而成。

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t}$$

2、 麦克斯韦位移电流假设

Farady 的研究表明，变化的磁场能够产生电场。那可否问这样的一个问题：变化的电场能否激发磁场？

思考一：在稳定电流情况下，导出了电流激发磁场的规律 $\nabla \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(x)$ 在一般的情况下是否成立？

如果对上式两边同时求散度，有

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J}$$

由于 $\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right) \equiv 0$，因此有

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

此式与电荷守恒定律$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$相矛盾，因为在一般（非稳定）的情况下，有$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$，这里因为电荷守恒定律是更为基本的定律。

那么，如果我们承认电荷守恒规律是普遍成立的，那在恒定条件下得到的规律 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ 在一般的情况下必须修改。麦克斯韦首先认识到这一矛盾之处，并从**理论上**巧妙的解决了这一问题。

根据库仑定律导出的高斯定理的微分形式：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- 反映了电荷与电场线之间的定量关系；
- 这种关系在一般的情况下仍然成立，只不过在电荷量变化的同时，它所激发的电场线的数目也在变化：

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\varepsilon_0}$$

根据这一点，将$\rho(\vec{x}, t) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}, t)$代入电荷守恒定律，

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) = \nabla \cdot \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}\right) \equiv 0$$

因此，如果将在恒定条件下得到的 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ 中，将 $\vec{J}$ 替换为 $\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$，则上述矛盾就解决了！

这样，原来的微分方程（2.11）在一般的情况下应改为

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{B}&=\mu_0\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)\\&=\mu_0\left(\vec{J}+\vec{J}_D\right)\end{aligned}$$

式中

$$\vec{J}_D=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

称为**位移电流**。

- 位移电流的引入是麦克斯韦对电磁场理论作出的最杰出的贡献；
- 位移电流项从另一个侧面揭示了电场和磁场之间的联系：不仅变化的磁场激发电场（法拉第效应），变化的电场同样激发磁场。

剩下的疑问：从稳恒条件下得到并推广的规律（$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x},t)=0$）与法拉第定律（$\nabla\times\vec{E}(\vec{x},t)=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t}$）这两个关系式并不存在矛盾。（可以验证）

分析：对法拉第定律两边取散度得到，

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{B}\right)$$

由于 $\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) = 0$，*得到* $\partial \nabla \cdot \vec{B} / \partial t = 0$。*所以* $\nabla \cdot \vec{B} =$ 常数 。

为了与稳定情况下的 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ *一致，我们选取这个常数为零，这样与法拉第定律也不矛盾。*

3、麦克斯韦电磁场理论

电磁现象的普遍规律

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
&\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
&\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}
\end{aligned}$$

——（3.10）

- 反映了电荷、电流激发电磁场，以及电磁场内部的运动规律；
- 电磁场可以独立于电荷之外而存在。在 ρ 和 $\vec{J}$ 为零的区域（即所谓自由空间），电场和磁场通过本身的互相激发而运动、传播——电磁波：

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{x},t)=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t},$$
$$\nabla\times\vec{B}(\vec{x},t)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{x},t)$$
$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x},t)=0,$$
$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{x},t)=0$$

大家注意到：在这四个方程中电场、磁场是具有高度的对称性，除了第 1、2 方程中出现负号的不一致；而正是方程 1 中的负号的出现，我们才能够推导出自由空间中电磁场的运动方程——电磁场波动方程：

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{E}(\vec{x},t)=0$$
$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{B}(\vec{x},t)=0$$
$$\nabla\cdot\vec{E}=0,\nabla\cdot\vec{B}=0$$

式中 $c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=2.998\times10^8\ (\mathrm{m/s})$为电磁波在真空中的传播速度；

- 1865 年，麦克斯韦从理论上预言了电磁波的存在，同时指出光其实是一种电磁波；
- 1888 年，德国科学家 Heinrich Rudolf Hertz 从实验上证明了电磁波的存在；
- 电场和磁场是电磁场这种特殊物质的两张面孔(参见

Griffiths, pages 301–3)，爱因斯坦正是抓住了磁场与电场之间的关联性，提出了狭义相对论，指出在不同的惯性参照系之间电场、磁场可以全部或者部分转换。

4、洛伦兹力

在电磁场的作用下，带电粒子受到的力称为洛伦兹力，包含电场力和磁场力两部分：

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

这一公式适用于任意运动速度的带电粒子。

如果电流为连续分布，设电荷的体密度为ρ，则 $\mathrm{d}V$ 体积的带电体系受到的静电场力为

$$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{f}\mathrm{d}V$$

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \qquad (3.11)$$

$\vec{f}$ 为单位体积的带电体系所受到的力（力密度）。(3.11)为洛伦兹力的密度公式。

几点说明：

- 在第五章——电磁波辐射，我们可以看到，对于随着时间变化的电磁场，我们证明，仍可以引入矢势和标势（物理意义不同于静电场的势！）来描述电磁场，

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

作用在点电荷上的洛伦兹力的形式可以改写为

$$\vec{F} = q\left[-\nabla U - \frac{d\vec{A}}{dt}\right]$$

其中，$U = \phi - \vec{v} \cdot \vec{A}$ 为单位点电荷在电磁场中的势能，它不是一个守恒量，原因是它依赖于速度。

- 有了势能的表达式，则带电粒子的拉格朗日(Lagrangian)量为：

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\left(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}\right)$$

根据拉格朗日方程，我们也可以推导出洛伦兹力的公式（思考题)。

- 若电荷不是在真空而是在实际材料中运动，则洛伦兹力不足以描述粒子的运动，还需要借助复杂的输运理论；
- 运动的带电粒子本身也会产生电磁场，从而影响到施加在其上的电磁场；此外，如果粒子存在加速运动，则会产生辐射场，从而使得粒子减速（第七章内容）.

作业 3：自由空间中 Maxwell 方程组

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t},$$
$$\nabla \times \vec{B}(\vec{x},t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{x},t)$$
$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x},t) = 0,$$
$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x},t) = 0$$

结合相关的矢量运算方法，推导出自由空间中电磁场的波动方程：

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{E}(\vec{x},t) = 0$$
$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{B}(\vec{x},t) = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \nabla \cdot \vec{B} = 0$$