

## 上次课要点

- ✓ 介质中的麦克斯韦方程（微分形式）：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

电位移矢量  $\vec{D}$  的定义：

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

磁场强度  $\vec{H}$  的定义：

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

- ✓ 介质中的极化强度与极化电荷体密度之关系：

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_P$$

- ✓ 对于两种介质的分界面上，

$$(\vec{P}_2 \cdot \vec{n}_{21} - \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_{21}) = -\sigma_P$$

- ✓ 介质中的麦克斯韦方程（积分形式）：

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_f dV = Q_f$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_f \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = I_f + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

## §5 介质分界面上的麦克斯韦方程组的形式 电磁场的边值关系

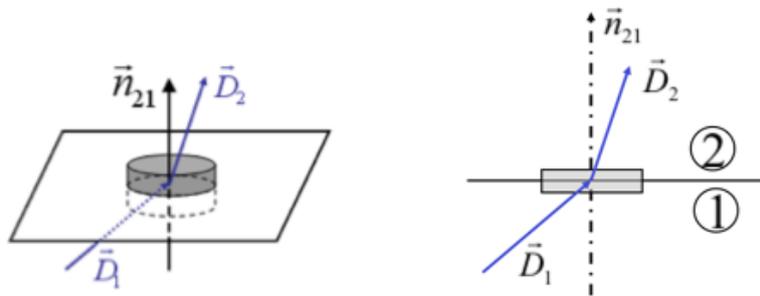
- ✧ 在不同介质的交界面上，由于介质性质的突变，电磁场也会有突变；
- ✧ 在分界面上，微分形式的麦克斯韦方程失去意义，但积分形式仍然适用。

### 1、 电磁场在界面沿法向分量的变化

根据： $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f$ ，仿造前面对面束缚电荷的研究方法：

在分界面取一面元  $dS$ ，在面元的两侧取一定厚度的簿层；簿层内出现的自由电荷与  $dS$  的比值称

为分界面上自由电荷的面密度，用  $\sigma_f$  表示。



对于所选取的柱面运用公式 (4.3') 得到

$$\sigma_f S = \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_{21} S - \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{21} S + \int_{S_{\text{侧}}} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

式中  $\vec{n}_{21}$  为面法向 (从介质 1 指向介质 2)。

注意到在所选取的柱面的高度趋于零 (物理小) 时, 有  $\int_{S_{\text{侧}}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$ , 从而得到

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{n}_{21} - \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{21} = \sigma_f$$

—— (5.5)

结论:

- 电位移矢量的法向分量在界面处一般是不连续的, 除非界面上无面自由电荷分布。
- 一般地, 可根据自由电荷的面分布确定分界面两侧电位移矢量的法向之间的关系; 再利用介质的电磁性质方程, 得到两侧电场强度法向分量之间的关系。
- 电场的法向分量一般不连续。若介质都是绝缘的介质, 界面上无自由电荷面分布:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

- 仿照同样的推导, 可得一般情况下有

$$B_{2n} = B_{1n}$$

即: 磁感应强度的法向分量在界面处始终是连续的。

- 对于自由电荷 / 电流、极化电荷 / 电流、磁化电流有如下的守恒定律:

$$\nabla \cdot \vec{J}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_P + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_M = 0$$

可以仿照类似的推导，一般情况有：

$$J_{M2n} = J_{M1n}$$

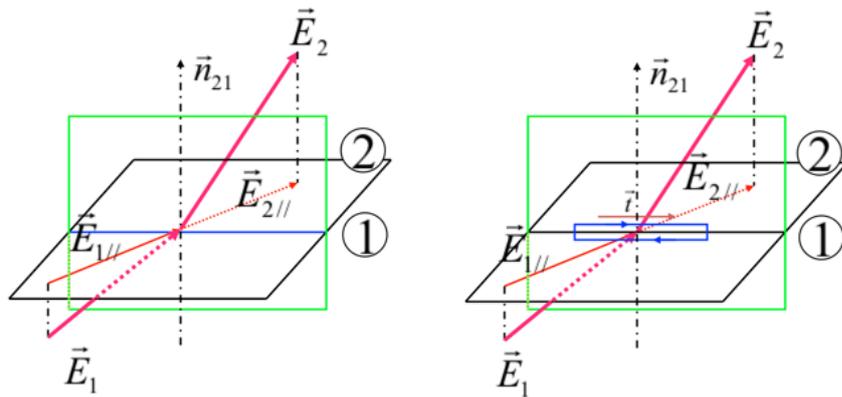
而对于稳恒状态，有

$$J_{f2n} = J_{f1n}, \quad J_{P2n} = J_{P1n}$$

## 2、 电磁场切向分量的跃变

### 1) 面电流密度矢量

实际中常遇到电流集中分布在介质的表面或者分界面一簿层内流动的情形——面电流密度



- 面电流模型：电流集中在介质分界面（如导体与介电材料）厚度为  $h$  的簿层内流动，并且  $h \rightarrow 0$ ，而  $J \rightarrow \infty$

- 面电流密度矢量  $\vec{\alpha}$ ：它表示在单位时间内垂直通过分界面上单位长度的电量。

- 单位时间内流过分界面上长为  $\Delta l$  的线元的电量  $\Delta I$

$$\Delta I = \Delta l \vec{\alpha} \cdot \vec{n}$$

$\vec{n}$  为与线元相垂直的一个单位矢量（在界面内！）

## 2) 电磁场切向分量的跃变

对法拉第定律的积分形式

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

运用到跨越界面的长方形积分回路中； $\vec{t}$  为界面的切向方向的单位矢量。

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \Delta l \vec{t} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)$$

当回路积分中跨过两侧高度趋于零时，面积趋于零，等

式右边的积分值  $\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  也趋于零，从而得到

$$\vec{t} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

由于上式在界面的任何切线方向均成立，即在界面处电场的切向分量是连续的；

$$E_{1t} = E_{2t}$$

说明：

- 上式也可表示为

$$\vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

—— (5.10)

分析：前面给出的结果等价于

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)_{//} = 0$$

$$\text{由于 } \vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)_{//} = \vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)$$

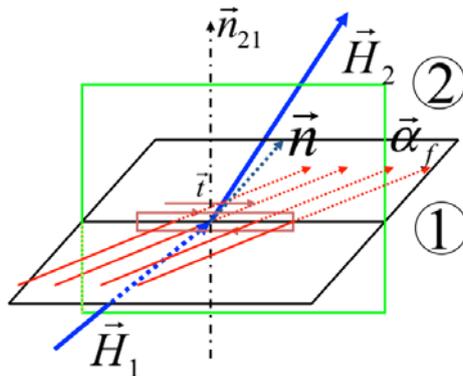
从而得出

$$\vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

- 运用同样的步骤，将介质中的麦克斯韦方程之一：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_f \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

运用到图示的线积分回路中（需要规定一个积分路径的饶向）得到



$$\Delta l \vec{l} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

若分界面上存在面电流分布， $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \vec{\alpha}_f \cdot \vec{n} \Delta l$

由于回路构成的面  $S$  的正法向方向单位矢量  $\vec{n}$  (由积分回路的绕向确定) 也在分界面内, 且  $\vec{n} = \vec{n}_{21} \times \vec{t}$

$$\begin{aligned}\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= \vec{\alpha}_f \cdot \vec{n} \Delta l \\ &= \vec{\alpha}_f \cdot (\vec{n}_{21} \times \vec{t}) \Delta l = \vec{t} \cdot (\vec{\alpha}_f \times \vec{n}_{21}) \Delta l\end{aligned}$$

此处利用矢量运算关系:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

因此有

$$\vec{t} \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{t} \cdot (\vec{\alpha}_f \times \vec{n}_{21})$$

或者

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)_{//} = \vec{\alpha}_f \times \vec{n}_{21}$$

进一步,

$$\vec{n}_{21} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)_{//} = \vec{n}_{21} \times (\vec{\alpha}_f \times \vec{n}_{21})$$

利用

$$\vec{n}_{21} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)_{//} = \vec{n}_{21} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)$$

以及

$$\begin{aligned}\vec{n}_{21} \times (\vec{\alpha}_f \times \vec{n}_{21}) &= (\vec{n}_{21} \cdot \vec{n}_{21}) \vec{\alpha}_f - (\vec{n}_{21} \cdot \vec{\alpha}_f) \vec{n}_{21} \\ &= \vec{\alpha}_f\end{aligned}$$

此处运用了公式:

$$\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b}$$

从而得到

$$\vec{n}_{21} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f$$

- 可以仿照类似的步骤, 根据磁化强度与磁化电流密度之

间的关系： $\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$ ，推导出在两种磁介质分界面两侧的如下约束关系：

$$\vec{n}_{21} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) = \vec{\alpha}_M$$

- 我们总结一下电磁场的边值关系：

$$\vec{n}_{21} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f$$

$$\vec{n}_{21} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{n}_{21} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f$$

—— (5.11)

说明：

- 边界条件把界面两侧的场量联系起来，本质上是 Maxwell 方程在边界上的体现；
- 磁感应强度的法向和电场的切向在边界上始终是连续的；
- 上面基于自由电荷 / 电流的面分布模型假设，给出的边值关系，表明了介质两侧的场与界面上的自由电荷、电流之间的制约关系：电场法向和磁感应强度的切向在边界上一般会有跃变。

补充：电磁场边值关系的独立性分析，我们分两种情况考虑，一种是静态场，另一种是随时间变化的电磁场。

1) 对于静态场，麦氏方程组为

$$\nabla \times \bar{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_f$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

它们之间是相互独立的，因此边值关系也是相互独立的

2) 随时间变化的电磁场，

在一定的条件下都可通过傅里叶分析方法展开为不同频率的时谐电磁场的叠加。在一定频率下，麦氏方程组可写为

$$\nabla \times \bar{E} = -i\omega \bar{B}$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_f$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + i\omega \bar{D}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

对（1）式取散度，由于 $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{E}) = 0$ ，因此 $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ ，即（4）式。类似的，对（2）式取散度，并利用电荷守恒定律，可获得（3）式。因此（1）-（4）式不是完全独立的。与此相应，边值关系的四个式不是完全独立的，由两个叉乘的边值关系式可以导出两个点乘的边值关系式。

因此在讨论恒定场情况下，介质分界面上的边值关系必须同时考虑四个边值关系式。而在讨论时变场时，介质分界面上的边值关系只需考虑两个叉乘的边值关系。

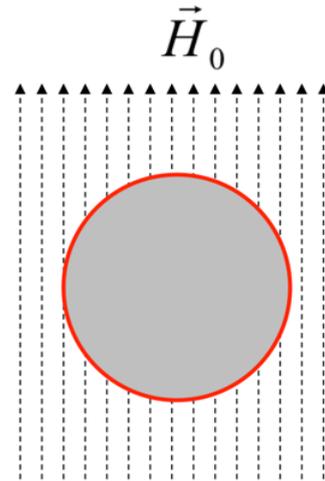
**例题：**将超导体球体放置在均匀外磁场  $\vec{B}_0$  下，通过降低温度到临界温度以下，超导体从正常态转变为超导状态，超导体表面出现超导电流，其作用屏蔽超导体内的磁场 ( $\vec{B} = 0$ )，这种效应成为 Meissner 效应。假设在超导状态下均匀磁化的超导球，磁化强度  $\vec{M} = -\frac{3}{2}\vec{H}_0$ ，计算磁化电流（超导电流）的分布。

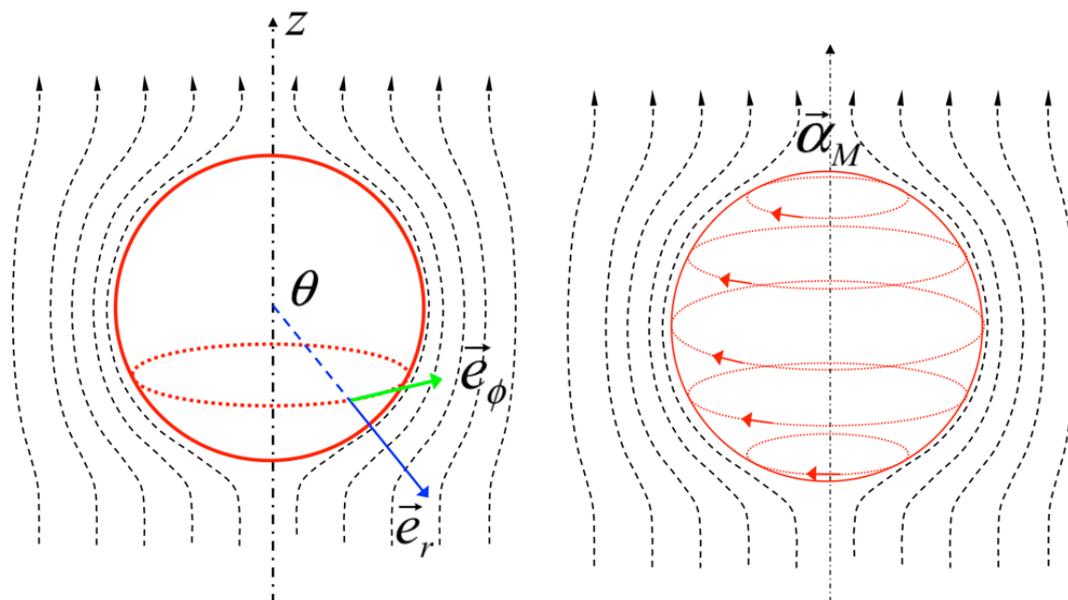
**解：**介质的磁化电流密度与磁化强度的关系为  $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$ 。因此超导球体内无磁化电流，电流只出现在超导球体的表面层

$$\vec{n}_{21} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) = \vec{\alpha}_M$$

超导球表面的面电流密度

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_M &= -\vec{e}_r \times \vec{M} \\ &= \frac{3}{2} H_0 \vec{e}_r \times \vec{e}_z \\ &= -\frac{3}{2} H_0 \sin \theta \vec{e}_\phi \end{aligned}$$





### 思考题:

如何通过面电荷分布、面电流分布模型，及介质两侧的场之间与自由电荷分布约束关系，来加深对上面电磁场边值关系的认识：

- 到目前位置，我们引入过几个理想的模型，比如点电荷模型（电荷密度趋于无穷大，而体积趋于无穷小，而乘积为定值）、电偶极子模型（单个点电荷电量趋于无穷大，而两者之间距趋于无穷小，乘积为定值）。
- 所谓电荷面分布就是由带电点电荷分布构成的一个面（介质的分界面）。面电流则是限制在面内这些点电荷移动形成的电流。
- 假设在一个半径为  $R$  的介质球（介电常数为  $\epsilon_1$ ）放置于无限大绝缘介质（介电常数为  $\epsilon_2$ ）内。假设我们采用某种方法在分界面的一侧厚度为  $\Delta$  的壳层内引入均匀分布

的自由电荷，电荷总电量  $Q$ 。建议有兴趣的同学来计算球壳两侧的电场、电位移矢量的关系，并讨论当球壳厚度  $\Delta \rightarrow 0$  的极限情况。

其它例题：

1) 试证明：当两种绝缘介质的交界面上没有自由电荷时，交界面两侧电场线与交界面法线的夹角  $\theta_1$  和  $\theta_2$  满足：

$\text{tg}\theta_1/\text{tg}\theta_2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ ，式中  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  分别为两介质的电容率。

2) 试证明：当两种导电介质内有恒定电流时，在交界面两侧的电场线与交界面法向的夹角  $\theta_1$  和  $\theta_2$  满足

$\text{tg}\theta_1/\text{tg}\theta_2 = \sigma_1/\sigma_2$ ，式中  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  分别为两导电介质的电导率。

3) 当导电介质（电导率为  $\sigma$ ）与绝缘体（电容率为  $\varepsilon$ ）接触时，交界面两侧电场线与法向的夹角如何？（暂时不介绍。一个问题：处于静电平衡条件在的金属导体，和导电的介质两者所表现出的行为有区别吗？）

解：根据边界条件，

$$\vec{n}_{21} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f$$

$$\vec{n}_{21} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

电场线的切向分量始终是连续的，即

$$E_{1t} = E_{2t}$$

1) 两种绝缘介质构成的界面上没有自由电荷面分布时，电位移矢量的法向是连续的

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$D_{1n} = D_{2n}$$

对于线性的绝缘介质， $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ ，因此有

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

$$\text{tg}\theta_i = \frac{E_{it}}{E_{in}}, \quad i = 1, 2$$

$$\text{tg}\theta_1/\text{tg}\theta_2 = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

2) 在恒定电流情况下，在导电介质内部有有 $\partial\rho/\partial t = 0$ ，根据电荷守恒定律可知， $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ ，对应到界面上有

$$J_{1n} = J_{2n}$$

由欧姆定律 $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ ，可得

$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

$$\text{tg}\theta_1/\text{tg}\theta_2 = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

3) 对导体与绝缘体接触构成的交界面两侧电场线的分布特征，需区分导体是处于静电平衡，还是存在恒定电流两种情况。

a) 对于金属导体，一旦处于静电平衡状态，则导电介质内部的电场为零。根据电场切向分量的连续性，绝缘介质一侧的电场线只有垂直界面的分量。

b) 对于导电介质，一旦建立恒定的电流，设靠近分界面的电流密度为 $\vec{J}_1$ 。由于绝缘介质内的电流密度为零，以及恒定情况下在分界面两侧的电流密度矢量的法向分量的连续

性，可知

$$J_{1n} = J_{2n} = 0$$

对于导电介质有  $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ ，因此导电介质中电场线的法向分量满足

$$E_{1n} = 0$$

$$J_1 = \sigma E_{1t}$$

恒定情况下，导电介质中的电场线只能沿分界面的切向方向。在绝缘介质一侧，根据边值关系

$$E_{2t} = E_{1t} = J_1 / \sigma$$

$$D_{2n} - D_{1n} = D_{2n} = \varepsilon_2 E_{2n} = \alpha$$

因此，绝缘介质内的电场线与交界面的夹角满足

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = \frac{E_{1t}}{\alpha / \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_2}{\alpha \sigma} J_1$$

**09月18日作业题：**

**郭硕鸿《电动力学》(第三版) P35 - 36页：**

**习题 11、13**