第二章 静电场

✧ 上一章研究了电磁现象的基本规律。从本章开始，我们将对电动力学领域中一些重要的问题及其求解方法进行更为深入的讨论。

✧ 当体系的电荷分布不随时间变化，其所激发的电场也不随时间发生变化，我们称这样的电场为静电场。

✧ 本章讨论的主要问题：在给定的自由电荷分布以及周围空间介质和导体分布的情况下，如何求解静电场。

✧ 本章内容所提及的求解静电场的方法有：镜象法、分离变量法和格林函数法等。求解的依据是唯一性定理。

§1 静电场的标势及其微分方程

1、 静电场的标势——静电势

前面一章得到麦克斯韦方程的一般微分形式是：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \quad {}_{f},$$

$$\nabla \times \vec{E} = \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

作为电磁学问题中的一个特殊现象，即静电现象，其场量都不随时间改变，并且电荷静止不动这两个条件，即所谓静电条件。我们可以表达成以下形式：

$$\frac{}{t}(physical\ quantity) = 0$$

$$\vec{J}_f = 0.$$

在静电条件下，电磁场所满足的方程：

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \quad {}_{f}$$

$$\nabla \times \vec{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

- ○ 静电条件下，电场和磁场相互独立，可分别求解；
- ○ 静电场是无旋场。

1、解决静电问题的基本方程：

- 静电条件下的微分方程

$$\nabla \cdot \vec{D} = \quad {}_f$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

- 连同边界条件

$$\vec{n}_{21} \quad (\vec{E}_2 \quad \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{n}_{21} \times \left(\vec{D}_2 \quad \vec{D}_1\right) = \quad {}_f$$

- 介质的电磁性质方程（本构方程）

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$$

——组成解决静电问题的基础。

2、静电势　的定义

静电场的一个重要的特征——无旋性 $\nabla \times \vec{E} = 0$，总可以把静电场表示成一个标量场的梯度（的负值）

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

- 思考一下：本来一个矢量场有三个分量，为何可以用只有一个分量的标量来描述？
- 由于 φ 是标量，处理静电问题时，通常是首先求出 φ，接着由 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 计算场量，然后再计算诸如电场力 $\vec{F}$ 等量。

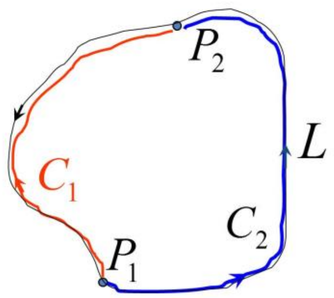
根据静电场无旋性，有如下的积分形式：

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

——（1.4）

它表示“电场沿任一闭合回路的线积分等于零。”

考虑将单位电荷从 P_1 点移至 P_2 点时，电场对它所做的功为 $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 。



$$\begin{aligned}
&\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \int_{C_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{-C_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \int_{C_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{C_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0
\end{aligned}$$

即：$\int_{C_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{C_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

- 将单位电荷从 P_1 点移至 P_2 点时电场对它所做的功与具体的路径无关，只与起点和终点有关。
- 由此看出，可以引入一个标势函数 φ 来描述静电场的这一特点！

引入静电标势的概念：定义两点间的电势差为

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

——（1.5）

空间沿 $\mathrm{d}\vec{l}$ 的两点的电势的增量为

$$\begin{aligned}
d \quad &= \nabla \quad \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \quad \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}
\end{aligned} \qquad \text{——(1.6)}$$

说明：

- 知道空间的电场的分布，则可以计算空间任意两点间的电势差；
- 标量势是由微分方程确定的，解方程时允许有任意的积分常数，所以它的值不具有绝对意义，有意义的是两点之间的差值。
- 通常选取某个参考点，规定该点的电势为零，这样整个空间里的电势就有一个确定的值。
- 如果电荷分布在有限的空间里，则可以取无穷远处的电势为零，即

$$\varphi(\infty)=0$$

这样空间 P 点的电势为

$$\varphi(P)=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

点电荷的电场分布 $\vec{E}(\vec{r})=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$，则其周围的电势分布为

$$\begin{aligned}\varphi(P)&=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}'\\&=\int_r^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\vec{r}'\cdot\mathrm{d}\vec{r}'\\&=\int_r^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\mathrm{d}r'=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\end{aligned}$$

假设已知空间（包括介质存在的情况下）所有电荷分布 $\left(\vec{x}'\right)$，则空间任意一点的电势为

$$\varphi\left(\vec{x}\right)=\int_V \frac{\rho\left(\vec{x}'\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V$$

————（1.8）

$\vec{x}$ 代表场点的位置坐标；$\vec{x}'$ 代表电荷源 $\rho\left(\vec{x}'\right)\mathrm{d}V$ 的位置坐标；r 代表从源点到场点的距离。

- 因此，若空间中所有电荷分布都给定，则可根据此公式求出电势的分布，然后求得空间电场分布；
- 实际问题中，往往不是所有电荷的分布都能预先给定的，例如极化电荷事先并不知道如何分布，所以直接用这种方法来求解电场不一定可行！

3、静电势的微分方程

假设所讨论的体系为均匀、各向同性、线性介质，则有电磁性质关系（本构关系）：

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

或者

$$\nabla\cdot\vec{D} = \quad \nabla\cdot\vec{E} = \quad {}_f,$$

代入到：$\vec{E}=-\nabla\varphi$，**得到：**

$$\nabla^2 \quad \left(\vec{x}\right) = \quad \frac{{}_f}{\quad}$$

方程（1.9）称为泊松（Poisson）方程。

说明：

- 若在无源区域内（$\rho_f(\vec{x})=0$），上式退化为

$$\nabla^2\varphi(\vec{x})=0$$

  此方程称为拉普拉斯方程（Laplace）方程。

- 在不同条件下求解泊松方程或拉普拉斯方程，是处理静电问题的基本途径。
- 思考题：对于稳恒电流的带电体系（非静电、但是稳恒！），体系的电场能否采用类似的方法，即引入标势来表征？如果可以，则标势的微分方程形式如何？

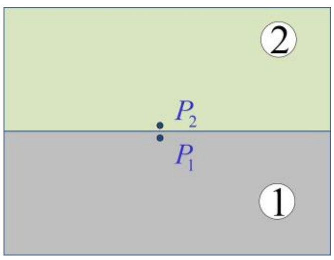
如果电场不变，则磁场为恒定，则partial B/partial t=0，则rotE=0，因此电场形式不变。

4、 静电势介质分界面上边值关系：

1）静电势边值关系之一：

考虑介质 1 和 2 分界面两侧相邻的两点 P_1 和 P_2，这两点的电势差为

$$\varphi(P_2)-\varphi(P_1)=-\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$



由于在介质的分界面处电场是有限的值，在积分路径非常小的情况下，**右边的积分值趋近于零**，因此介质

分界面两侧的电势相等。

$$\varphi(P_2)-\varphi(P_1)=0$$

或者

$$\varphi(P_2)=\varphi(P_1)$$

——（1.11）

- 即在介质的分界面处电势是连续的；
- **“电势连续”与“电场强度切向分量连续”的边界条件是完全等价的。**

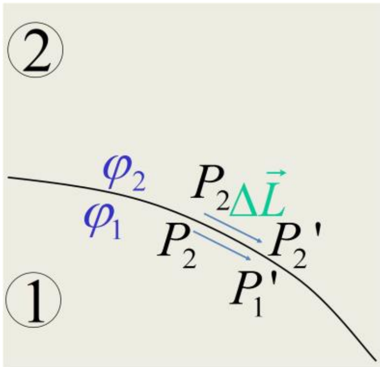
$$\vec{n}_{21}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0$$

证明如下：

从图中看出，由于跨过边界之后电势连续，

$$\varphi_1(P_1)=\varphi_2(P_2)$$

$$\varphi_1(P_1^{'})=\varphi_2(P_2^{'})$$



从而有

$$\varphi_1(P_1^{'})-\varphi_1(P_1)=\varphi_2(P_2^{'})-\varphi_2(P_2)$$

假设从 P_1（$P_1^{'}$）到 P_2（$P_2^{'}$）的位矢为 $\Delta\vec{l}$，则有

$$_1(P_1^{'})\qquad _1(P_1)= \quad \vec{E}_1\cdot \quad \vec{l}$$

$$\varphi_2(P_2^{'})-\varphi_2(P_2)=-\vec{E}_2\cdot\Delta\vec{l}$$

所以

$$\vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{l} = \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{l}$$

此式表示电场沿界面的切向分量相等。

2）静电势边值关系之二：

根据电位移矢量法向与界面上自由电荷面密度之间的关系：

$$\vec{n}_{21} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma_f$$

由于： $E_{1n_{21}} = \frac{\quad 1}{n_{21}}, E_{2n_{21}} = \frac{\quad 2}{n_{21}}$

利用不同介质的本构关系：

$$D_{1_{n_{21}}} = {}_1E_{1n_{21}}$$

$$D_{2n_{21}} = \varepsilon_2 E_{2n_{21}}$$

从而得到静电势的第二个边值关系：

$$_2\frac{\quad 2}{n_{21}} \quad _1\frac{\quad 1}{n_{21}} = \quad _f$$

——（1.12）

总结静电势的边值关系：

$$\varphi(P_2) = \varphi(P_1)$$

$$_2\frac{\quad 2}{n_{21}} \quad _1\frac{\quad 1}{n_{21}} = \quad _f$$

5、金属导体静电学

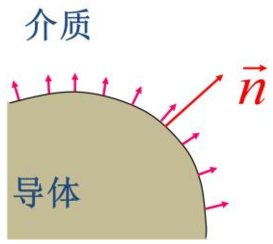
1）静电条件下的金属导体

金属导体内存在大量的自由电子，因此当导体内部存在电场时，就会引起传导电流存在，并满足欧姆定律：$\vec{J}_f = \quad _c\vec{E}$；

由此可见：

- 在静电学$\vec{J}_f = 0$的前提下，导体内的电场强度必须为零，否则必定引起电流的存在。
- 根据$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$，可知$\nabla\cdot\vec{D} = \quad _f = 0$，即处于静电状态下金属导体内部不可能有净自由电荷的体分布，净自由电荷只能分布在导体表面。
- 在静电条件下，在金属导体内靠近界面处，电场的切向分量也必须为零，否则将引起表面电流；金属导体的表面是等势面；整个金属导体是等势体。
- 电场线处处与金属导体的表面垂直；导体表面电场的法向分量可以不为零，根据高斯定理，其法向分量与此处的表面电荷密度成正比。

2）归纳一下：静电条件下导体/介质边界条件



$$\vec{n}\times\vec{E} = 0$$

$$\vec{n}\times\vec{D} = \quad _f$$

公式中的$\vec{n}$定义为导体表面的面法向单位矢量（指向

导体外面）

3）静电状态下，与金属导体相邻的介电一侧的电势的边界条件：

$$\varphi\big|_{边界} = 常数$$

$$_{2}\frac{\quad^{2}}{n} = \qquad _{f}$$

$$\underline{\qquad\quad}(1.13)$$

原则上讲，有导体存在的相关静电问题就是在边界条件（1.13）下求解相应的泊松方程。式中，面法向矢量$\vec{n}$为从导体内指向导体外的单位矢量。

4）导体表面的总自由电荷量为：

$$Q_i = \bigcirc_{S_i} \quad _{f}\mathrm{d}S = \quad \bigcirc_{S_i} \quad \frac{}{n}\mathrm{d}S$$

或者

$$\bigcirc_{S_i} \frac{}{n}\mathrm{d}S = \quad Q_i/ \qquad （2.9）$$

再提醒：式中面法向矢量$\vec{n}$为从导体内指向导体外的单位矢量。

～～～～～～～～～～～～待续～～～～～～～～～～～～～～

5）静电状态下，计算作用在导体上的压强（假设导体处于真空中）：

- 根据静电平衡，导体表面的电场可用表面电荷表示，即：

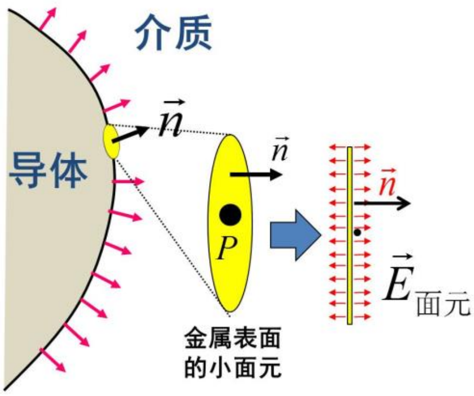
$$\frac{\quad}{n} = \quad{}_{f}$$

$$\text{可得}\, E_n = \quad \frac{\quad}{n} = \frac{{}_{f}}{{}_{0}},$$

$$\text{或者}\, \vec{E} = \frac{{}_{f}}{{}_{0}}\vec{n}$$

- 考虑导体表面一个面元，其附近的电场应当等于面元处电荷产生的场，以及不包括面元区域的导体表面上其它电荷对其产生的场之和，即：

$$\vec{E} = \vec{E}_{面元} + \vec{E}_{其它}$$



由于我们是考察一个与面元无限靠近的点的电场，所以在计算面元上的电荷在 **P** 处所产生的电场，我们仍可以借助一个无限大的面分布电荷所对应的电场，

因此：

$$\vec{E}_{面元}=\pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

注意：这是一个很有用的近似处理方法，物理学家经常采用这样的近似来处理位于金属颗粒表面的分子或者量子点与光的相互作用。

由于导体内部的电场为零，则

$$\vec{E}_{其它}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

- 单位面积导体表面的面电荷在除自身以外电荷所激发电场的作用下受力的作用，单位面积上的受力（即压强）：

$$\vec{f}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

结论：静电场所施加在导体上的压力始终是负压力，趋使导体被拉向电场的区域。

思考题：如果导体周围存在绝缘介质，上述表达式是否需要修改？ 不需要吧

6、采用电势表示静电场的能量

对于线性介质，根据第一章公式（6.12），静电场的总能量为

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty}\vec{E}\cdot\vec{D}\mathrm{d}V$$

利用关系 $\vec{E} = \quad \nabla \quad$ ， $\nabla\cdot\vec{D} = \quad {}_{f}$ ，得到，

$$\begin{aligned}\vec{E}\cdot\vec{D} &= \quad \nabla \quad \cdot\vec{D} \\ &= \quad \nabla\cdot\left(\quad \vec{D}\right) + \quad \nabla\cdot\vec{D} \\ &= \quad \nabla\cdot\left(\quad \vec{D}\right) + \quad\quad {}_{f}\end{aligned}$$

此处利用了矢量运算公式

$$\nabla\cdot\left(\varphi\vec{f}\right) = \nabla\varphi\cdot\vec{f} + \varphi\nabla\cdot\vec{f}$$

将电场的能量改写为

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2}\int_{\infty} \quad {}_{f}\mathrm{d}V \quad \frac{1}{2}\int_{\infty}\nabla\cdot\left(\quad \vec{D}\right)\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\int_{\infty} \quad {}_{f}\mathrm{d}V \quad \frac{1}{2}\oint_{S} \quad \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\end{aligned}$$

————（1.14）

由于我们考察的是静电体系的总能量，因此上述体积分是对全空间进行的，相应的面积分是对无限大的面进行的。

而对有限的电荷体系，其在无穷远处的电势 $\varphi \sim \frac{1}{r}$，电场 $\sim \frac{1}{r^2}$，而面积 $\sim r^2$，因此在 $r \sim \infty$ 时，面积分项（1.14式右边第二项）的值为零。能量的表达式变为：

$$W = \frac{1}{2} \quad\quad {}_{f}\mathrm{d}V \text{————（1.15）}$$

讨论：对于 1.15 式的使用，应该注意以下几点：

- $w=\frac{1}{2}\qquad {}_{f}\,dV$ 中的 φ 是由所有电荷分布 ρ 激发的电势；
- 上式只有作为静电场的总能量才有效，也就是说，当计算空间某一有限范围内的电场能量时，应采用公式 $W=\frac{1}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{D}\mathrm{d}V$；
- 存在电场的地方就存在能量，而电场不局限于自由电荷所处的区域，因此 $\frac{1}{2}\qquad {}_{f}$ 并不代表电场能量密度（没有电荷就没有能量的看法是错误的）；真实的静电能量是以 $w=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{D}$ 的形式在空间连续分布的，即：场强大的地方能量也大；
- 对于导体系统，采用上述公式计算静电场的总能量最为方便（静电条件下的导体为等势体）。

2014 年 9 月 24 日

习题：郭硕鸿教材，第二章习题 1（第三版 P94）