# 0 0 上次课要点

✓ 静电场的电势满足 **Poisson** 方程：

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}) = -\frac{\rho_f(\vec{x})}{\varepsilon}$$

✓ 在无自由电荷体分布的区域, **Poisson** 方程退化为 **Laplace** 方程：

$$\nabla^2\varphi(\vec{x}) = 0$$

✓ 静电势的边值关系：

$$\varphi(P_2) = \varphi(P_1)$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{21}} - \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{21}} = -\sigma_f$$

✓ 有导体存在时静电势的边界条件：

$$\varphi\big|_{\text{边界}} = \text{常数}$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{21}} = -\sigma_f$$

✓ 静电场总能量：

$$W = \frac{1}{2}\int_\infty \vec{E}\cdot\vec{D}\,\mathrm{d}V\ (\text{general})$$

$$= \frac{1}{2}\int_\infty \varphi\rho_f\,\mathrm{d}V\ (\text{only holds for electrostatic field})$$

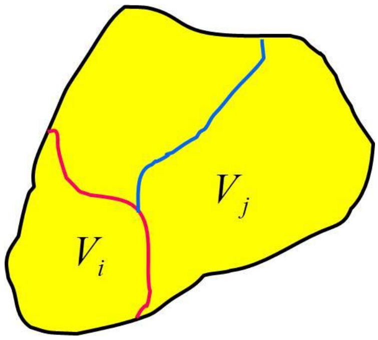
# §2.2 静电场的唯一性定理

**上一节内容中，我们利用静电场的特点（无旋特性），引入了静电标势，并给出了其满足的微分方程；因此，关于静电学的基本问题就变成求解电势在所有边界上满足边值关系或者给定边界条件的泊松方程的解。然而，我们知道，**对于同一个静电场，所求的电势解如果不是唯一，那它们至多相差一个常数。

**本节将回答这样一个问题：电势**要满足哪几个条件，就能唯一确定（求解）静电场。

我们将从以下两个方面讨论唯一性定理：

- 一般形式的唯一性定理（**一般形式，这是指分界面上无自由电荷面分布的情况**）
- 有导体存在时的唯一性定理（**这是指分界面上存在自由电荷面分布的情况**）




**1、一般形式的唯一性定理**

**1）问题的提出：**

假设所研究的区域 $V$ 可以分为若干个均匀的小区域 $V_i$，

$$V = \sum_i V_i$$

我们假设每个小区域都是各向同性的介质，每个小区域$V_i$的自由电荷体分布为$r_f(\vec{x})$，电容率为$\varepsilon_i$。

**在上述基本条件下，有：**

① 电势在每个小区域满足泊松方程：

$$\nabla^2 f_i(\vec{x}) = -\frac{r_f(\vec{x})}{e_i} \qquad (2.1)$$

(有几个区域就有几个对应的泊松方程)

② 在相邻区域$V_i$与$V_j$的分界面上，电势还必须满足如下的边值关系（分界面上无自由电面分布）：

$$\varphi_i = \varphi_j$$

$$\varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \qquad (2.2)$$

至此，对于区域$V$而言，我们还不知道外边界上的条件。这个问题正是唯一性定理所要解决的：就是我们还需要知道外边界上的什么条件之后，求能够唯一确定区域内的静电场。

**2）唯一性定理的内容：若**

i）区域$V$内给定自由电荷分布$r_f(\vec{x})$；

ii）区域$V$的外边界$S$上给定电势$\varphi|_S$，

**或者**电势的法向导数$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S$，

则$V$内的电场唯一确定。

证明：（采用反证法）

假设有两组不同的解$\varphi'$和$\varphi''$都满足上述定理中所给出的条件。定义：

$$\varphi = \varphi' - \varphi'' \qquad （2.3）$$

由于在均匀的区域$V_i$内有

$$\nabla^2 f' = - r_{fi} / e_i$$

$$\nabla^2 f'' = - r_{fi} / e_i$$

因此对于每个均匀区域，有

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{（Laplace 方程）（2.4）}$$

另一方面，在$V_i$与$V_j$分界面上，$\varphi'$和$\varphi''$一定满足

$$\varphi_i' = \varphi_j'$$

$$\varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i'}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j'}{\partial n}$$

$$\varphi_i'' = \varphi_j''$$

$$\varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i''}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j''}{\partial n}$$

所以在内边界上$\varphi$也必然满足

$$\varphi_i = \varphi_j$$

$$\varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \qquad （2.5）$$

在$V$的外边界上，有

$$\varphi\big|_S = \varphi'\big|_S - \varphi''\big|_S = 0 \qquad \text{（给定的条件）}$$

——（2.6a）

或者

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S=\left.\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right|_S-\left.\frac{\partial\varphi''}{\partial n}\right|_S=0$$ （**给定的条件**）

——（2.6b）

考察第 $i$ 个均匀区域$V_i$的界面上的如下面积分：

$$\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_{V_i}\nabla\cdot(\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi)\mathrm{d}V$$

此处利用公式（I.19）

$$\nabla\cdot(\phi\vec{g})=\nabla\phi\cdot\vec{g}+\phi\nabla\cdot\vec{g}$$

分析等式的右边一项

$$\begin{aligned}&\int_{V_i}\nabla\cdot(\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi)\mathrm{d}V\\&=\int_{V_i}\nabla(\varepsilon_i\varphi)\nabla\varphi\mathrm{d}V+\int_{V_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}V\\&=\int_{V_i}\varepsilon_i\nabla\varphi\nabla\varphi\mathrm{d}V+\int_{V_i}\varepsilon_i\varphi\nabla^2\varphi\mathrm{d}V\\&=\int_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V+\int_{V_i}\varepsilon_i\varphi\nabla^2\varphi\mathrm{d}V\end{aligned}$$

由（2.4）式得等式右边的第二项为零，则

$$\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_{V_i}\nabla\cdot(\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi)\mathrm{d}V=\int_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V$$

所以对于整体区域$V$，有：

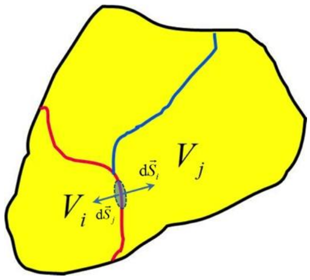
$$\begin{aligned}&\sum_i\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\&=\sum_i\int_{V_i}\nabla\cdot(\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi)\mathrm{d}V\\&=\sum_i\int_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V\end{aligned}$$

对于上式左边的面积分：

$$\sum_i \oint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

这里应当涉及两种界面：**一是**整体区域$V$的外界面，**二是**各个均匀小区域之间的分界面。我们分别来讨论：

i）对于$V_i$与$V_j$的分界面，




根据（2.5）式，$\varphi$和$\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$是连续的，

但

$$\mathrm{d}\vec{S}_i = -\mathrm{d}\vec{S}_j\,,$$

因此在面积分$\sum_i \oint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}\vec{S}$中，内部界面的积分互相抵消。

ii）在$V$的外界面$S$上，

如果$\varphi|_S = 0$，或者$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 0$，只要有其中的任意一个条件满足，此面积分均为零。

因此有

$$\sum_i \oint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla\varphi)^2 \mathrm{d}V = 0$$

但是被积函数$\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2$始终满足

$$\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2 \ge 0$$

因此上式成立的唯一情况是在$V$内的各处均有

$$\nabla\varphi = 0$$

即在整个$V$内，

$$\varphi = 常数$$

这表明两个解$\varphi'$和$\varphi''$至多相差一个常数，但电势的附加常数对电场无影响，这样就证明了唯一性定理。

补充：

*G r i f f i t h s 书中的证明方法：*


*图中所示的区域和它的边界，表面的电势$\varphi_0$给定。*

*假设该区域内拉普拉斯方程有两个解：*

$$\nabla^2\varphi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\varphi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

*两个解都满足边界上给定的条件，令：*

$$\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$$

*那么：*

$$\nabla^2\varphi_3 = \nabla^2\varphi_1 - \nabla^2\varphi_2 = 0$$

*并且在边界上$\varphi_3$处处为 0。但是拉普拉斯方程不允许内部区域的极大或者极小值，所有的极值必须要处在边界上，所以$\varphi_3$的极大值和极小值均为 0（极大值原理），因此，$\varphi_3$必须处处为 0。所以$\varphi_1 = \varphi_2$*

唯一性定理定理也表明，

a) 唯一性定理对于静电问题的重要性在于：只要我们得到一个满足泊松方程以及相应的边界条件的解，那么这个解一定就是该问题的严格解。
b) 从方法论上，我们根据物理直觉和物理图像可以猜测出一些问题的解，此时唯一性定理保证了其正确性
c) 如果我们针对这类边值问题，找到一个试探的解，但若我们验证这个试探的解满足上述的几个条件，包括验证它是否满足微分方程，是否满足内部的边值关系，以及在外边界上是否满足边值关系，如果都满足，那这个试探解就是这个问题的解；
d) 有时，我们在给出一个试探解的时候，可以在一开始保留 1-2 个未知的系数（但并不影响所满足的微分方程），然后根据边值关系，来确定这些系数。

## 2、有导体存在时的唯一性定理

对于导体存在的静电问题，每个导体上的总电荷 $Q$ 与电势 $\varphi$ 实际上是一对共轭量，通常求解这类问题时不可能同时预先设定每个导体上的总电荷和电势。

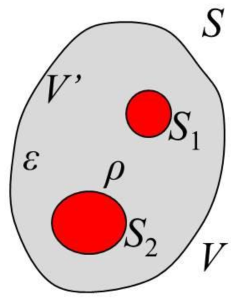
因此，当有导体存在时，为了确定电场，我们可以

根据这一对共轭量，将导体的静电问题设置为以下两类问题：

- **第一类问题：**给定每个导体上的电势$\varphi_i$；
- **第二类问题：**给定每个导体上的自由电荷总电量$Q_i$。（这里我们把下标 f 省略了）

由此，对于有导体存在时的唯一性定理可以做如下描述：

设在某区域$V$内有导体，我们把除去导体内部以后的区域定义为$V'$，显然$V'$的边界包括了整个体系的外部边界$S$，以及及每个导体的边界$S_i$。




1）第一类问题的唯一性定理：

a) 给定区域$V'$内为均匀分布的介质，自由电荷分布$r_f(\vec{x})$；

b) 在$V$的外边界$S$上给定$\varphi|_S$，或者电势的法向导数$\partial\varphi/\partial n|_S$；

c) 每个导体$i$的电势$\varphi_i$亦给定，

则$V'$内的电场唯一确定。

由于当给定了导体的电势后相当于给定了体系完备的外边界条件，那么给定导体的唯一性定理就退化成了一般形式，因此此定理的证明方法同上。

**2）第二类问题的唯一性定理：**

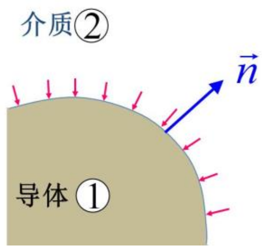
i）给定区域$V'$内自由电荷分布$\rho_f(\vec{x})$；

ii）在$V$的外边界$S$上给定$\varphi|_S$或者电势的法向导数$\partial\varphi/\partial n|_S$；

iii）每个导体$i$上的总电荷$Q_i$亦给定，

则$V'$内的电场唯一确定。

对于此类唯一性定理所提出的条件，我们首先分析一下：第$i$个导体上的总电荷$Q_i$的形式




根据边界条件：（1.12）

$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{21}}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{21}}=-\sigma_f$$

对于介质和导体的分界面，上式简化为

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\sigma_f$$

式中，面法向矢量为从导体内指向导体外的单位矢量。

由于导体表面的总电荷满足：$Q_i=\oint_{S_i}\sigma_f\mathrm{d}S=-\oint_{S_i}\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S$

或者

$$\oint_{S_i}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S=-Q_i/\varepsilon \tag{2.9}$$

注意：这里实际上是把电荷的问题转化成了导体电势

所满足的方程。

**证明：**依然采用反证法

假设有两个不同的解$\varphi'$和$\varphi''$满足上述条件，定义

$$\varphi=\varphi'-\varphi''$$

根据相同的泊松方程形式，则在$V'$内$\varphi$满足

$$\nabla^2\varphi=0 \qquad (2.11)$$

而对于导体，由于总电荷$Q_i$是给定的，则有：

$$\oint_{S_i}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S=\oint_{S_i}\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\mathrm{d}S-\oint_{S_i}\frac{\partial\varphi''}{\partial n}\mathrm{d}S$$
$$=-Q_i/\varepsilon-(-Q_i/\varepsilon)=0$$

因此：

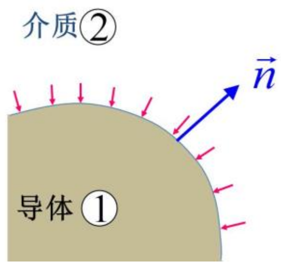
$$\varphi|_{S_i}=\varphi'|_{S_i}-\varphi''|_{S_i}=\text{常数} \qquad \text{——} \ (2.12)$$

对于外边界有，

$$\varphi|_S=0 \quad \text{或者} \quad \partial\varphi/\partial n|_S=0 \qquad \text{——} \ (2.13)$$

～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～

待续




接下来考虑对于导体以外的区域$V'$，与前面证明的思路类似，考虑其面积分$\oint\varphi\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{S}$：

这里里积分$V'$的面包括$V$的外边界面$s$以及每个导体

的表面$S_i$，即

$$\oint \varphi\nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\oint_S \varphi\nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\sum\oint_{S_i}\varphi_i\nabla\varphi_i\cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_{\mathrm{i}}$$

注意：

- 作为$V'$的边界，$S_i$的面法线的方向是指向导体的内部的。
- 如果用$\vec{n}$表示从导体内指向外的面法线，则在对$S_i$的面积分

$$\oint_{S_i}\varphi_i\nabla\varphi_i\cdot \mathrm{d}\vec{S}_i=-\varphi_i\oint_{S_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\mathrm{d}S_i=0$$

而对于外边界面$S$，根据（2.13）可知

$$\oint_S \varphi\nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

因此有

$$\oint \varphi\nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

另一方面，上式可以表示为体积分的形式

$$\begin{aligned}\oint \varphi\nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\vec{S}&=\int_{V'}\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)\mathrm{d}V\\&=\int_{V'}(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V+\int_{V'}\varphi\nabla^2\varphi\mathrm{d}V\\&=\int_{V'}(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V\end{aligned}$$

从而得到

$$\int_{V'}(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V=0$$

因此得

$$\nabla\varphi=0$$

此式说明$\varphi'$与$\varphi''$至多相差一个常数，因而$V'$内的电

场唯一确定。

补充：

G r i f f i t h s 书中的证明方法：

假设存在两个电场满足上述条件，那么在导体之间我们有：

$$\nabla \bullet \overrightarrow{E_1} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \bullet \overrightarrow{E_2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

并且它们也满足高斯定理的积分形式

$$\iint \overrightarrow{E_1} \bullet \mathrm{d}\overrightarrow{S_i} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\iint \overrightarrow{E_2} \bullet \mathrm{d}\overrightarrow{S_i} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

其中，$S_i$ 为第 i 个导体的表面。

那么，对于外边界（无论是恰好包裹住了导体还是无限大的边界）

$$\iint \overrightarrow{E_1} \bullet \mathrm{d}\overrightarrow{S_o} = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$\iint \overrightarrow{E_2} \bullet \mathrm{d}\overrightarrow{S_o} = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

其中，$S_o$ 为外边界。

令 $\overrightarrow{E_3} = \overrightarrow{E_1} - \overrightarrow{E_2}$,

那么在导体之间有：

$$\nabla \bullet \overrightarrow{E_3} = 0$$

在每个导体边界上：

$$\iint \overrightarrow{E_3} \bullet \mathrm{d}\overrightarrow{S_i} = 0$$

虽然我们不知道电荷 $Q_i$ 如何在第 i 个导体表面分布，我们知道的是导体是一个等势体，因此在整个导体表面电势一定是一个常数，那么

$$\nabla \bullet (\varphi_3 \overrightarrow{E_3}) = \varphi_3 (\nabla \bullet \overrightarrow{E_3}) + \overrightarrow{E_3} \bullet (\nabla \varphi_3) = -\mathrm{E}_3^2$$

其中 $\overrightarrow{E_3} = -\nabla \varphi_3$

该式对导体之间的全空间积分：

$$\iiint\limits_{V_{tot}} \nabla \bullet (\varphi_3 \overrightarrow{E_3}) \mathrm{d}V = \iint\limits_{S_{\mathrm{tot}}} \varphi_3 \overrightarrow{E_3} \bullet \mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\iiint\limits_{V_{tot}} \mathrm{E}_3^2 \mathrm{d}V$$

其中 $S_{tot}$ 包括了区域的所有边界，包括导体边界和外边界。

既然在每个导体表面电势 $\varphi_3$ 都是常数，那么

$$\iiint\limits_{V_{tot}} \mathrm{E}_3{}^2 \mathrm{d}V = 0$$

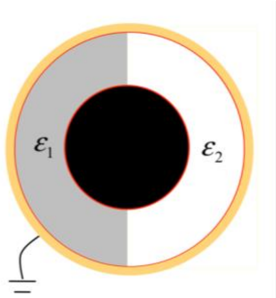
因为被积分的值不可能为负数，所以这个积分的唯一解就是 $E_3=0$，也就是说 $\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{E_2}$ qed!

**补充说明：**

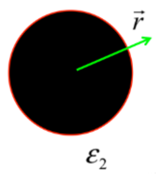
- 上面假设导体所处的介质是单一的均匀介质。若导体以外的区域是由几个均匀的区域组成，也可以写出对应的唯一性定理；
- 利用类似的方法证明静磁场也有解的唯一性定理；
- 对于铁电介质，$\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 不再是单值的，上述的唯一性定理是不成立的。这是因为铁电体的静电特性不仅与边界条件有关，还与其经历的历史有关。

**运用唯一性定理讨论几个问题：**

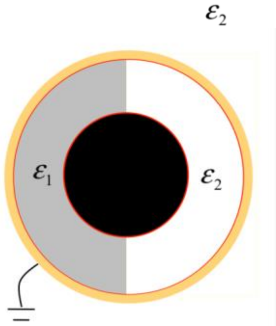
**例题 1：同心的导体球壳之间充以两种电介质，左半部的电容率为 $\varepsilon_1$，右半部的电容率为 $\varepsilon_2$。假设内球壳的总电量为 $Q$，外球壳接地。计算球壳之间的电场和球壳上电荷分布。**




解：对于右图所示的边值问题，解为 $\varphi = \dfrac{A}{r}$。这个解满足唯一性定理的条件的所有条件。




而对弈本问题，所求解区域不存在自由电荷的体分布，并且也具有一定的对称性：在内外的球面边界上电势必须为常数，因此试探解可以取为




$$\varphi_{left} = \varphi_{right} = b + \frac{c}{r}$$

b、c 为待确定的两个常数，这个试探解满足 Laplace 方程，也满足内外球面（外边界）为等势面的条件；

对于球壳内部，介质之间的分界面上，由于这个面上无自由电荷的面分布，因此 $\varphi$ 和 $\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 在分界面两侧必须连续，而这里所选取的试探解都满足这两个基本要求。

考虑到外球壳接地，电势为零，因此有

$$\varphi_{left}=\varphi_{right}=b+\left.\frac{c}{r}\right|_{r=R_2}=0$$

或者

$$b+\frac{c}{R_2}=0$$

我们可以把试探解改写为：

$$\varphi_{left}=\varphi_{right}=c\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)$$

c 为待确定的一个系数。

**最后一点，内求表面的总的自由电荷电量是给定的，因此我们所选取的试探解也必须满足这个条件。考虑到**

$$\sigma=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

我们利用左右两个区域的电势试探解，求出在内边界导体表面的自由电荷面密度，分别为：

$$\sigma_{right} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_{right}}{\partial r}\bigg|_{r=R_1} = \frac{\varepsilon_2 c}{R_1^2}$$

$$\sigma_{left} = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_{left}}{\partial r}\bigg|_{r=R_1} = \frac{\varepsilon_1 c}{R_1^2}$$

由于在内导体球表面的总自由电荷电量

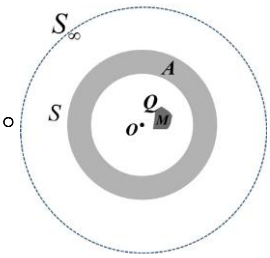
$$\oint_S \sigma_f \mathrm{d}S = Q$$

最后求得：

$$c = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

最后的解为：

$$\varphi_{left} = \varphi_{right} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right),$$
$$(R_1 < r < R_2)$$




**例题 2**：有一个中性的导体球壳 $A$，在此球壳内放置一带电体 $M$，其荷电为 $Q$。证明：

1）球壳外的电场只与有关 $Q$，与 $M$ 在球壳内的位置无关；

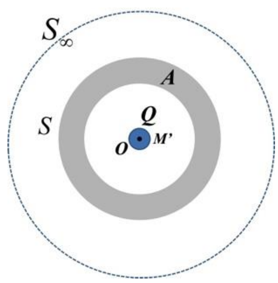
2）球壳 $A$ 的外表面上的电荷为一均匀分布，与 $M$ 在球壳内的位置无关。

**证明：**

所研究的区域为球壳外的区域，区域内无自由电荷的体分布，这一特点不依赖于 $M$ 在球壳内的位置；

其界面为$S$和$S_\infty$：$S_\infty$边界上的电势为零；对于界面$S$，由于感应使得$A$的内表面的电量为$-Q$，则界面$S$上的总电量为$Q$，这一结论不论$M$在球壳内何处，只要在球壳内即成立。

上述分析说明：在所求解区域的外界面上电势给定，在与导体的分界面上总电量给定，满足**第二类型的唯一性定理**，因此的电场唯一确定。




2）球壳外的电场分布既然与$M$在球壳内的位置无关，那也必然与$M$的形状无关，只与它的总电量$Q$有关。所以可以假设球壳内一个等电量的带电体$M'$为球形，而且与球壳$A$同心，对于这样的体系，由于具有中心对称性，可知$A$表面的电荷分布的面密度为常数。

如果变动$M'$的位置和形状至$M$，由于电量$Q$不变，则球壳外的电场不变，由

$$E_n = \sigma / \varepsilon_0$$

知$\sigma$不变，仍保持常数。