上次课回顾

对于求解静电场问题，概括起来大致有以下类型的边界条件：

（1） 绝缘介质的分界面上，边界条件为

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

（2） 给定导体上的电势，导体表面的边界条件为

$$\varphi|_S = \text{常数}$$

（3） 给定导体所带电荷的总电量，导体表面的边界条件为

$$-\oint_S \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S = Q_f$$

§2.3 镜像法

静电边值问题具有唯一的解（电场），然而获得这个“唯一解”却有很多种途径。我们上一节所讨论的唯一性定理的意义就在于，它保证了所采用方法的灵活性和解的正确性。通俗地说，不论利用什么方法找到的解，只要能够满足必要的条件，包括微分方程、边界和边值条件，那么这个解就是正确的解。

有些问题可以结合简单直观的物理图像，用猜测

的办法来获得正确的解。

镜象法就是一种有效的试探解的方法，其主要思想是利用区域外部虚设的点（像）电荷来代替来模拟边界面上的感应电荷或极化电荷对所求解区域的电势贡献。

1、问题的提出：

- 我们知道一个区域内部的电势应该由区域内部的电荷和处在边界处的电荷共同决定，即：

$$\phi=\phi_V+\phi_S=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}')dv'}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma(\vec{x}')ds'}{R}$$

——（3.1）;

- 如果区域内的电荷分布状况是已知的，那$\varphi_{内}$很容易计算。但对于边界上，由于$\sigma(\vec{x}')$通常是未知的，因此很难直接求解；
- 幸运的是，在某些特殊情况下（3.1）式中由边界产生的$\varphi_{边}$可以完全等价为处于区域外部的一些虚拟的点电荷对区域内电势产生的贡献，即$\varphi_{边}\to\varphi_{像}$。
- 需要特别注意的是，由于像电荷处于所求解的区域之外，因此$\nabla^2\varphi_{像}\equiv 0$，这样所求解区域内由于自由电荷分布没有改变，所以所求解问题

的泊松方程的形式并没有发生变化；

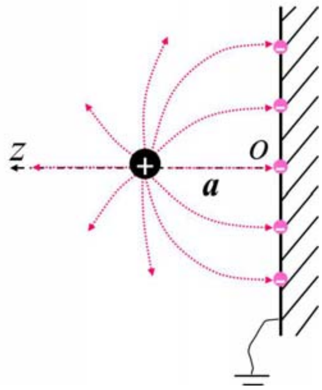
- 接下来，只需要调整点电荷的量和具体空间位置，使总电势φ满足所给的边界条件，我们就找到了唯一的正确解。

例 1：这里首先举一个简单的例子，在距离接地无限大导体平面为a处有一点电荷Q，求空间的电势分布。

分析：

➢ 空间的电场为点电荷和导体表面的感应电荷共同激发的；

➢ 感应电荷又是在**总电场**的作用下达到静电平衡的；



➢ 静电平衡条件要求：电场线处处与导体的表面相垂直；导体的表面为一个等势面，因此这一问题的边界条件为：$\phi = \text{const. at metal surface}$

➢ 另一方面，如果我们考虑这样一个体系，左侧区域内也只有一个点电荷 Q，但在导体所处的区域（界面）*-a* 处放置一个点电荷-*Q*，这样就构成一对正负电荷的系统。对于这个体系，在点电荷连线的中垂面上，电力线和此中垂面同样垂直，且此中垂面是零等位面（$\varphi = 0$）。

对比一下两个体系，在求解的区域电荷分布完全相同，所涉及的边界上的电势也完全一样，因此两个点电荷的电势的叠加在左侧区域的电势就是我们所要找的解。或者说，我们用一等量异号点电荷来等效模拟了原来体系边界上的面电荷对左侧区域电势的贡献。

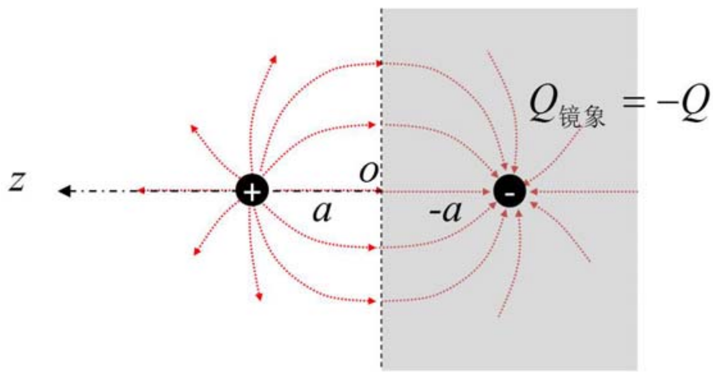
解：区域内的电势可表示为

$$\varphi = \varphi_{点} + \varphi_{面}$$

$$\varphi_{点} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}$$

根据上面的分心，导体表面的感应面电荷对区域内场的贡献等效地用处于区域外（导体内）的$(0,0,-a)$处点电荷$-Q$所产生的电场来替代。这个假想的电荷称为镜象电荷。

$$\varphi_{面} = \varphi_{镜象}$$



这样，问题的解即变为：

$$\begin{aligned}\varphi = & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} \\ & +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\end{aligned} \quad \text{--（3.2）}$$

这个解正确与否，只要判断它是否满足所求解区域内的泊松方程和边界条件。

注：对于镜象电荷产生的贡献项，

$$\phi_{\text{image charge}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}$$

利用关系式：

$$\nabla^2\frac{1}{r}=0 \qquad (r\neq 0)\text{，}$$

得到$\nabla^2\phi_{\text{image charge}}\big|_{z>0}=0$，所以在导体以外的区域，泊松方程中电荷分布没有发生变化。

由上面简单的例子，可以总结出寻找虚拟电荷来替代分界面上的感应面电荷 / 极化面电荷对所求解区域的电势（电场）的贡献，一般要遵循以下**几条原则**：

- 唯一性定理要求像电荷必定在求解区域之外；
- 像电荷替代了真实的感应电荷或者极化电荷，原来的界面上的电荷就不存在了，整个空间是无界均匀的。

对于上述结果，进行以下几个进一步的讨论：

a) 导体面上的感应电荷密度

带入到式（3.2）中，可得导体表面电荷分布：

$$\sigma_f = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n}\bigg|_{z=0} = -\frac{aQ}{2\pi}\frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}$$

b) 金属板表面总感应自由电荷

$$\begin{aligned} Q_{\text{induced}} &= \int \sigma_f \, dx\, dy \\ &= \int -\frac{aQ}{2\pi}\frac{dxdy}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{aQ}{2\pi}\int_0^\infty \frac{2\pi r dr}{(a^2+r^2)^{3/2}} = \frac{aQ}{\sqrt{a^2+r^2}}\bigg|_0^\infty = -Q \end{aligned}$$

结论：镜像点电荷的量等于导体平板上的总感应电荷量。

c) 点电荷 Q 受到的力：

- 导体表面感应电荷在 $z>0$ 的区域的电场等价于镜像电荷-Q 在 $z>0$ 区域的贡献（从表达式上看亦是如此）；
- 因此 Q 受到的电场力即为镜像电荷-Q 的电场对它的作用力（吸引力）：

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4a^2}$$

d) 体系的电势能

体系的电势能，相当于把电荷从无穷远处移动到距

离导体 a 处，外力所需要做的功，即：

$$W=\int_{\infty}^{P}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{\infty}^{a}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4z^2}(-\mathrm{d}z)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4a}$$

这就是体系的电势能。

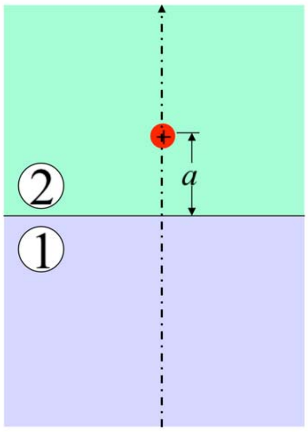
说明：

- 体系的电势能为把一个点电荷从无穷远移到场中的某一位置,外力所需要做的(最少)功；
- 由两个点电荷体系的能量：$W_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_2\frac{q_1}{r_{12}}$，那么两个等量异号且相距为 2a 的点电荷所构成的体系的能量为：$W_2=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2a}$
- 比较得到：$W=\frac{1}{2}W_2$。从物理上，实际的体系的场分布区域只有两个等量异号电荷体系场分布区域的一半，故势能也只占两个电荷体系的一半。

思考题：如果空间被平行的两个无限大接地金属平板分割（金属平板间距为 a），如何利用镜象法讨论平板中间放置的点电荷 Q 的受力情况。

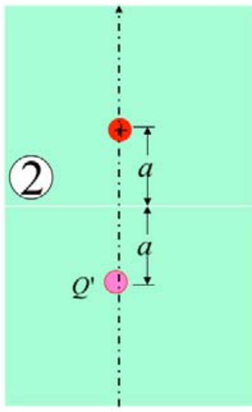
接下来我们讨论一个在介质体系下使用镜象法求解静电场的例子。

例题 2：在无穷大空间中充满介电系数分别为ε_1和ε_2的两种均匀电介质，分界面为半无限大平面。如图，在介质 2 中引入自由电荷 Q，距离分界面为 a，试求两介质中的电势分布。



解：　分别分析两种介质中电势的来源分布：

在介质 2 中（z>0）：



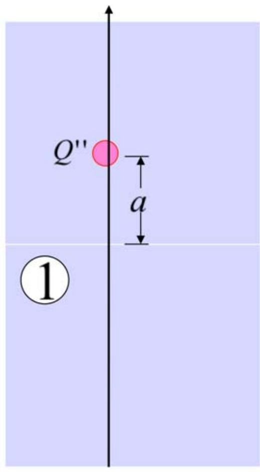
- **电势**的贡献项中，除了引入的**自由电荷的贡献**外，还有同一位置的处**极化点电荷**，以及分界面上的极化面电荷的贡献项；
- **假设所有极化电荷**所产生的效果可以用一个处于介质 1 区域中的镜像电荷Q' 所代替，　试解为

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{Q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}$$

注意：上式仅定义于 z>0 的区域。

在介质 1 中（z<0）：

- 该区域无自由电荷，但分界面上的极化电荷对该区域的电势分布产生贡献；
- 区域 2 中自由电荷和近邻极化电荷，以及分界面处的极化电荷在介质区域 1 中所产生的效果可以用一个处于区域 2 中的镜像电荷 Q'' 所代替，即试解为



$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\frac{Q''}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$$

注意：上式仅定义于在 z<0 的区域。

由于在分界面处无自由电荷，因此边界条件为：

$$\begin{cases} \varphi_2\big|_{z=0} = \varphi_1\big|_{z=0} \\ \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}\Big|_{z=0} = \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}\Big|_{z=0} \end{cases}$$

把 φ_1 和 φ_2 的解的形式带入到边界条件中,得到：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_2}(Q+Q') = \dfrac{1}{\varepsilon_1}Q'' \\ Q\cdot(-a) + Q'\cdot a = Q''\cdot(-a) \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} Q' = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} Q \\ Q'' = \dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} Q \end{cases}$$

综上，可以得出在不同介质中电势的分布：

在$z>0$的区域，电势为：

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left\{\frac{1}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{1/2}} - \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+\varepsilon_1)\left[x^2+y^2+(z+a)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

在$z<0$的区域，电势为：

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{2\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{Q}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{1/2}}$$

可以验证，解的形式满足泊松方程，及相应的边界条件。唯一性定理保证了上述解的正确性。

思考：

a）如果一开始不假设把镜像电荷放在＋a 或者-a 处，问题能够得到求解吗？

b）如果在界面附近放置一个自由电荷构成的电偶极子，这个问题能否用镜像法求解？等学到分离变量法一节，我们还可以采用分离变量法来讨论相关的问题。

c）超流体^{4}He的自由液面除了表面波的零点运动和热运动以外，可以认为是非常平坦的理想表面。

如果在此液面上放置低密度的电子，由于^{4}He表面极化电荷的作用，会使得电子趋近于吸附在^{4}He的表面附近（10nm 距离），由于低密度低能电子之间的间距可以认为远大于这个距离，所以这些电子在^{4}He表面形成了理想的二维电子气。理论上已经证明了在足够低的温度下，电子气可以形成维格纳（Wigner）晶格。同学可以利用镜象法思考一下这一物理现象，并讨论作用在表面电子上的经典吸引势（也就是每个电子受到的经典束缚势能）。（请杨鑫修改一下，我的印象中这部分的内容是取自 Griffith 的教材）

2014 年 09 月 28 日

习题：

郭硕鸿教材，第二章习题 9、10、11（第三版 P72）

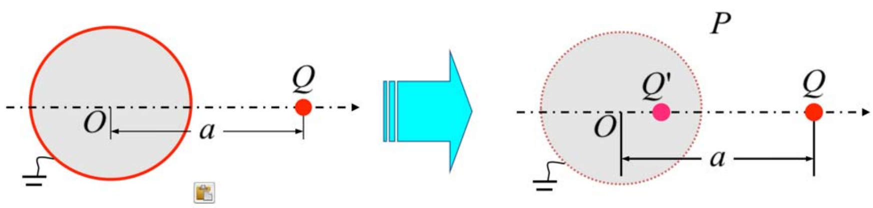
例 3：真空中有一半径为R_0的接地导体球，在球外距离球心为a（即：$a > R_0$）处有一点电荷Q，求空间各点的电势。

几点分析：

- 球外空间的电势有两部分组成：点电荷Q所产生的电势，和导体球表面感应电荷所产生的电势；

- 静电平衡条件要求导体球的表面是等势面，且电势为零。
- 求解的是除去导体球外部空间，因此替代导体球表面的感应面电荷贡献的像电荷的位置应当选取在导体球的内部，

解：假设导体球表面的感应电荷所激发的电场可以用处于导体球所在区域的假想点电荷Q'产生的电场来代替。



根据对称性，Q'应放置在电荷Q与球心的连线上。为了确定Q'的大小和位置，使得球面电势满足上述边界条件：

$$\phi\big|_{r=R_0} = \text{const.} = 0$$

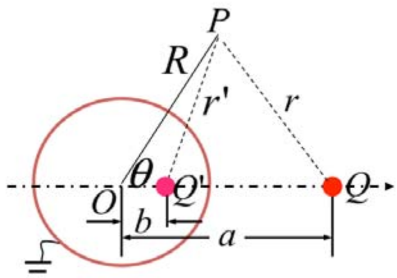
假设其到球心的距离为b，则导体球外$(R > R_0)$任一点的电势φ可表示为

$$\varphi = \varphi_{点} + \varphi_{镜象}$$

其中：

$$\varphi_{点} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}}$$



$$\varphi_{镜象} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{r'}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2bR\cos\theta}}$$

将边界条件$\varphi|_{r=R_0} = 0$带入上式，得到

$$\frac{Q}{\sqrt{R_0^2 + a^2 - 2aR_0\cos\theta}} - \frac{Q'}{\sqrt{R_0^2 + b^2 - 2bR_0\cos\theta}} \equiv 0$$

即：

$$Q^2\left(R_0^2 + b^2 - 2bR_0\cos\theta\right) \equiv Q'^2\left(R_0^2 + a^2 - 2aR_0\cos\theta\right)$$

在任意θ的情况下，上式须为恒等式，故满足：

$$\begin{cases} Q^2\left(R_0^2 + b^2\right) = Q'^2\left(R_0^2 + a^2\right) \\ bQ^2 = aQ'^2 \end{cases}$$

方程组可有 $b = a$ 或者$b = \frac{R_0^2}{a}$两组解。显然后者为物理上的解，借此求得像电荷的电量$Q' = -\frac{R_0}{a}Q$。（请注意这里的负号）

导体球外任意一点的电势：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}} - \frac{R_0 Q/a}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2bR\cos\theta}}\right) \quad (r > R_0)$$

注：同样地由于对于球外区域，$r'\neq 0$，因此有 $\nabla^2\varphi_{镜象}=0$，即在球内区域假想电荷的引入确实并不改变球外区域内的电荷分布。

根据上述结果进行一些讨论：

1）**计算点电荷受到导体球的作用力：**

这个作用力来至于导体表面的感应电荷的作用力，或者更严格地讲是：表面感应电荷所激发的电场对点电荷的作用力。

由于表面感应电荷在导体球外所激发的电场可用镜象电荷所激发的电场来替代，因此这个作用力就等于点电荷与镜象电荷之间的作用力。**因此**，引力的大小为：

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|QQ'|}{(a-b)^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{aR_0Q^2}{\left(a^2-R_0^2\right)^2}$$

2）**导体球面上的电荷的面密度：**

导体表面感应电荷的面密度分布：

$$\sigma_f=-\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

式中，面法向单位矢量 $\vec{n}$ 为从导体内指向导体外、垂直导体表面的单位矢量。

$$\sigma_f = -\frac{Q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2+a^2-2aR\cos\theta\right)^{-1/2}\bigg|_{R=R_0}$$
$$-\frac{Q'}{4\pi}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2+b^2-2bR\cos\theta\right)^{-1/2}\bigg|_{R=R_0}$$

将Q'和b的表达式代入，化简后得到：

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi R_0^2}\left(\frac{R_0}{a}\right)\left(1+\frac{R_0^2}{a^2}-2\frac{R_0}{a}\cos\theta\right)^{-3/2}\left(1-\frac{R_0^2}{a^2}\right)$$

可以看出：对整个导体球表面，有

$$\sigma_f < 0\left(Q>0\right)。$$

对整个导体面积分，可得到导体表面总电量。

$$Q_{indued} = \oint_S \sigma_f \,\mathrm{d}S = \int_0^{\pi}\sigma\left(2\pi R_0\sin\theta\right)R_0\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{-Q}{4\pi R_0^2}\frac{R_0}{a}\left(1-\frac{R_0^2}{a^2}\right)\frac{2\pi R_0^2\sin\theta}{\left(1+\frac{R_0^2}{a^2}-2\frac{R_0}{a}\cos\theta\right)^{3/2}}\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{R_0}{a}Q$$

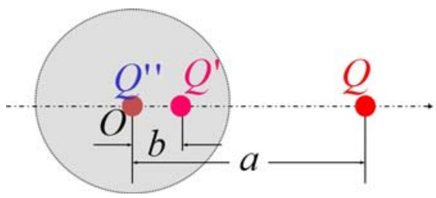
导体表面带的总电量等于镜象电荷的电量。

其它情况的讨论：

1） 若导体球不带电（电中性）、不接地

此种情况下，导体球满足

电中性条件：



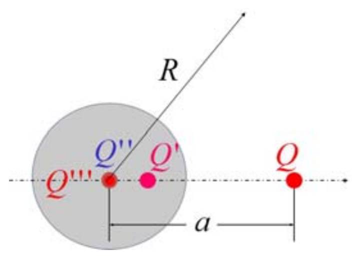
$$\oint_S \frac{\partial \phi}{\partial n}\mathrm{d}S = 0$$

在引入Q''之前，导体球表面的电势为零。为了使得在引入之后导体球的表面仍为等势面，Q''只能放置在球心处。在前例中所得到的接地导体球外的电势不满足电中性的条件，但如果在导体球所在的区域内再放置另一个镜象电荷$Q''=-Q'=R_0Q/a$，就满足电中性的边界条件。因此，此种情形下球外任意一点的电势为

$$\begin{aligned}\varphi = &\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\theta}} \\ &-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_0Q/a}{\sqrt{R^2+b^2-2bR\cos\theta}} \\ &+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_0Q/a}{R}\end{aligned}$$

2）若导体球带电量为q

和前面分析不接地导体球的情况类似，引入像电荷Q'和一个在球心处的$Q''=R_0Q/a$，这样的处理保证导体球为一个电中性、等势体；



因此，这里还需在球内引入电荷Q'''并使其电量为q，从而满足导体球自身带电量q的条件，这一点很容易通过高斯定理来理解。**而为了同时保持导**

体球的表面为等势面，Q'''也只能处于球心处。

综合起来，球外的电势可表示为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\theta}}$$
$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_0Q/a}{\sqrt{R^2+b^2-2bR\cos\theta}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left(\frac{R_0}{a}Q\right)$$
$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

思考题：将上例中得球变成球壳，外接电势U_0，如果在球壳内距离球心d处引入点电荷q，如何利用镜像法求解球内、外电势的分布。

总结一下镜像法的要旨在于

- 由于镜像（自由）电荷放置在求解区域之外，因而不改变求解区域内的电荷分布；
- 由于采用了镜像电荷作为替代，边界上的面电荷无需再考虑；
- 只要边界条件满足，唯一性定理就保证了找到的解是问题的正确解。