第七章 电子在磁场中运动

电磁作用和弱作用是迄今了解得最为清楚的基本作用力。特别是电磁作用，在经典力学中对其基本规律早已有很好的研究和阐述。因此，量子力学对于电磁作用下的单体、两体等可解问题的解答成为检验并显示量子力学正确性的试金石和支撑点。本章叙述，除已叙述过的中心场库仑场作用问题之外，电磁场作用下粒子的定态问题和某些含时问题。量子力学的确不负所望，继中心库仑场之后，在这类问题上再次给出了微观粒子电磁现象的正确的统一的理论描述。不仅如此，根据AB效应，量子力学还指出了经典电磁理论用场强表述的局限性，并以浅显的方式丰富了规范理论关于位相物理学的内容。

7.1 粒子在电磁场中的$Schrödinger$方程

前面我们讲过从经典力学到量子力学，关键在于一次量子化过程，即从力学量变成力学量算符。对于运动方程，$E=p^2/2m+V$，在坐标表象中，一次量子化给出$E\Longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$，$\hat{\vec{\mathbf{p}}}\Longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$。对于有电磁场存在的情况，带电粒子$(q,m)$在电磁场$\left(\vec{\mathbf{E}},\vec{\mathbf{B}}\right)$中受到的作用是

$$\vec{\mathbf{F}}=q\left(\vec{\mathbf{E}}+\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}\right)$$

更一般的表示，我们引入标势ϕ和矢势$\vec{\mathbf{A}}$来表征电磁场$\left(\vec{\mathbf{E}},\vec{\mathbf{B}}\right)$，即$\left(\vec{\mathbf{E}},\vec{\mathbf{B}}\right)\Longrightarrow\left(\phi,\vec{\mathbf{A}}\right)$，其中电场和磁场强度分别为

$$\vec{\mathbf{E}}=-\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}-\vec{\nabla}\phi\qquad\vec{\mathbf{B}}=\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}}$$

经典的H表示为

$$H=\frac{1}{2\mu}\left(\vec{\mathbf{p}}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)^2+V+q\phi$$

即按照经典规则，$(H-q\phi)$和$\left(\vec{\mathbf{p}}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)$之间的关系如同无场时的$H$和$\vec{\mathbf{p}}$关系一样。推广到量子力学，则$\hat{H}$对应为

$$\hat{H}=\frac{1}{2\mu}\left(\hat{\vec{\mathbf{p}}}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)^2+V+q\phi$$

按照上面的叙述，我们可以从无电磁场时的$Schrödinger$方程推广到有电磁场时的$Schrödinger$方程

$$\begin{aligned}E&=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\longrightarrow(E-q\phi)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi\\ \hat{\vec{\mathbf{p}}}&=-i\hbar\vec{\nabla}\longrightarrow\left(\hat{\vec{\mathbf{p}}}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)=-i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\end{aligned}$$

即

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[\frac{1}{2\mu}\left(-i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)^2+V+q\phi\right]\psi$$

这里，V为其它(如引力势等，原有的中心力场)势能项，$\hat{\vec{\mathbf{p}}} = -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}$是机械(普通)动量算符，$\hat{\vec{\mathbf{p}}} = -i\hbar\vec{\nabla}$是正则动量算符(即满足对易关系$[x,\hat{p}] = i\hbar$)。此时我们看到机械动量≠正则动量。以这种方式将电磁场引入$Schrödinger$方程，称为"最小电磁耦合原理"。原则上，这仍是一个假设，其正确性由所导出的全部结论是否与实验相符合所决定。迄今尚未发现不遵守这一原理的电磁相互作用。

一些讨论：

1) 库仑规范

$$\left[\hat{\vec{\mathbf{p}}}, \vec{\mathbf{A}}\right] = \hat{\vec{\mathbf{p}}} \cdot \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\vec{\mathbf{p}}} = -i\hbar\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}},$$

即，一般情况下$\hat{\mathbf{p}}$和$\mathbf{A}$不对易。如果取所谓的库仑规范，$\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0$，$\left[\hat{\vec{\mathbf{p}}}, \vec{\mathbf{A}}\right] = 0$。作为一个特别的例子，我们考虑均匀磁场的情况，其矢势为$\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{H}} \times \vec{\mathbf{r}}$，此时我们容易证明上述库仑规范满足。把$\left(\hat{\vec{\mathbf{p}}} - \frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)^2$式展开

$$\left(\hat{\vec{\mathbf{p}}} - \frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)^2 = p^2 + \frac{q^2A^2}{c^2} - \frac{q}{c}\left(\hat{\vec{\mathbf{p}}} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\vec{\mathbf{p}}}\right) = p^2 + \frac{q^2A^2}{c^2} - \frac{2q}{c}\vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\vec{\mathbf{p}}}$$

即

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{q^2A^2}{2\mu c^2} - \frac{q}{\mu c}\vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\vec{\mathbf{p}}} + q\phi + V \\
i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left[\frac{p^2}{2\mu} + \frac{q^2A^2}{2\mu c^2} - \frac{q}{\mu c}\vec{\mathbf{A}} \cdot \hat{\vec{\mathbf{p}}} + q\phi + V\right]\psi
\end{aligned}$$

2) 定域几率守恒

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t} &= \frac{\partial\left(\psi\psi^*\right)}{\partial t} = \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \\
&= \frac{1}{i\hbar}\psi^*\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{q^2A^2}{2mc^2} + i\hbar\frac{q}{\mu c}\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\nabla} + V + q\phi\right]\psi \\
&\quad -\frac{1}{i\hbar}\psi\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{q^2A^2}{2\mu c^2} - i\hbar\frac{q}{\mu c}\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\nabla} + V + q\phi\right]\psi^* \\
&= -\frac{\hbar}{2\mu i}\left(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right) + \frac{q}{\mu c}\vec{\mathbf{A}} \cdot \left(\psi^*\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) \\
&= -\frac{\hbar}{2\mu i}\vec{\nabla} \cdot \left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) + \frac{q}{\mu c}\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\nabla}\left(\psi^*\psi\right) \\
&= -\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\hbar}{2\mu i}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) - \frac{q}{\mu c}\vec{\mathbf{A}}\psi^*\psi\right]
\end{aligned}$$

令

$$\vec{\mathbf{j}} = \frac{\hbar}{2\mu i}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) - \frac{q}{\mu c}\vec{\mathbf{A}}\psi^*\psi$$

这是存在电磁场下ψ态中的几率流密度，其中含矢量$\vec{\mathbf{A}}$的第二项项是电磁场影响粒子的机械动量从而使几率流密度改变。由此给出了几率守恒的微分表达式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}} = 0$$

3) 规范不变性

在电磁场中粒子的波函数不是唯一确定的，原因是势场的选择不是唯一的；这些不同的势场可以通过一个规范变换得到

$$\vec{\mathbf{A}} \longrightarrow \vec{\mathbf{A}}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f \qquad \phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

其中f是任意的坐标和时间的函数(其量纲是磁通的量纲)。这样的规范变换不改变势场的强度，因此也不从本质上改变波动方程的解，特别是要保证$|\psi|^2$不变。我们只要令

$$\psi \longrightarrow \psi' = \exp\left(i\frac{qf}{\hbar c}\right)\psi$$

容易证明，波动方程形式在此规范变换下保持不变。这也告诉我们在处理粒子在电磁场中运动的问题中，选择合适的规范可以简化计算。由于电磁势不是唯一的,可以相差任一规范变换,因而粒子的波函数也不是唯一的,可以相差一个局域的(即随空间点改变而变化的)位相。

Appendix:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi\exp\left(i\frac{qf}{\hbar c}\right)}{\partial t} &= \exp\left(i\frac{qf}{\hbar c}\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{q}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\psi \\ \left(\hat{\vec{\mathbf{p}}}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}'\right)\exp\left(i\frac{qf}{\hbar c}\right)\psi &= \exp\left(i\frac{qf}{\hbar c}\right)\left[\hat{\vec{\mathbf{p}}}+\frac{q}{c}\vec{\nabla}f-\frac{q}{c}\left(\vec{A}+\vec{\nabla}f\right)\right]\psi = \exp\left(i\frac{qf}{\hbar c}\right)\left[\hat{\vec{\mathbf{p}}}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right]\psi \end{aligned}$$

所以

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{q}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\psi = \frac{\left(\hat{\vec{\mathbf{p}}}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)^2}{2\mu}\psi + V\psi + q\left(\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\psi$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\left(\hat{\vec{\mathbf{p}}}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)^2}{2\mu}\psi + V\psi + q\phi\psi$$

和

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \frac{\left(\hat{\vec{\mathbf{p}}}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}'\right)^2}{2\mu}\psi' + V\psi' + q\phi'\psi'$$

是同时成立的，即在规范变换下保持不变。

10.2 均匀磁场中粒子的运动— 无自旋情况

首先我们不考虑粒子的自旋情况，只是研究带电粒子的轨道运动受均匀磁场的影响，此时$\phi = 0$。由矢势的定义知道$\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{r}}$，令$H_0$为没有磁场的$Hamiltonian$，则在库仑规范下

$$H = H_0 + \frac{q^2A^2}{2\mu c^2} - \frac{q}{\mu c}\vec{\mathbf{A}}\cdot\hat{\vec{\mathbf{p}}}$$

第三项给出(利用公式$\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\cdot\vec{A} = \vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)$)

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\hat{\vec{\mathbf{p}}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{r}}\right)\cdot\hat{\vec{\mathbf{p}}} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{B}}\cdot\left(\vec{\mathbf{r}}\times\hat{\vec{\mathbf{p}}}\right) = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{L}}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{4}\left(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{r}}\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{r}}\right) = \frac{1}{4}\vec{\mathbf{B}}\cdot\left[\vec{\mathbf{r}}\times\left(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{r}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[B^2r^2-\left(\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\right)^2\right] = \frac{1}{4}B^2r^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

其中θ是$\vec{\mathbf{B}}$和$\vec{\mathbf{r}}$之间的夹角。因此

$$H = H_0 - \frac{q}{2\mu c}\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{L}} + \frac{q^2B^2r^2}{8\mu c^2}\sin^2\theta$$

令$\vec{\mu}_L=\frac{q}{2\mu c}\vec{\mathbf{L}}$是带电粒子的轨道磁矩，第二项表征了带电粒子的轨道磁矩与磁场的相互作用，一般称为$Zeeman$项，则

$$H=H_0-\vec{\mu}_L\cdot\vec{\mathbf{B}}+\frac{q^2B^2r^2}{8\mu c^2}\sin^2\theta$$

1) 中心场中的磁场效应— 正常$Zeeman$效应

磁场沿z轴方向，即取$\vec{\mathbf{B}}=(0,0,B)$，$\vec{\mathbf{A}}=\left(-\frac{1}{2}By,\frac{1}{2}Bx,0\right)$(满足$\vec{\mathbf{B}}=\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}}$),$\phi=0$。

我们首先估算一下后面两项的相对大小，一般磁场的大小为T的量级，原子的半径为$10^{-10}m$的量级，(注：$Gauss$制，$\hbar=1.055\times10^{-27}erg\dot{s}$;电子电量$q=4.8\times10^{-10}esu$)两者的比值

$$\frac{\frac{q^2B^2r^2}{8\mu c^2}\sin^2\theta}{\frac{q}{2\mu c}BL_z}=\frac{qBr^2}{4\hbar c}\frac{\sin^2\theta}{m}\sim10^{-4}\ll1$$

因此在不考虑强磁场的情况下，我们可以忽略第三项的贡献，

$$H=H_0-\frac{qB}{2\mu c}L_{\mathbf{z}}$$

如果是考虑处于原子中的单电子运动(带电量为$-e$)，V为屏蔽$Coulomb$势，与纯的$Coulomb$势稍有不同

$$H=\frac{p^2}{2\mu}-\frac{Ze^2}{r}+\frac{eB}{2\mu c}L_{\mathbf{z}}$$

在z方向外加磁场的情况下，原子的球对称性被破坏，因此$\vec{\mathbf{L}}$不再是一个守恒量。但可以证明L^2和L_z仍为守恒量，因此能量本征函数仍可以选为守恒量完全集(H,L^2,L_z)的共同本征函数，即取ψ_{nlm}，由此解得

$$E_{n_rlm}=E_{n_rl}+m\frac{eB\hbar}{2\mu c}=E_{n_rl}+m\hbar\omega_L$$

其中$\omega_L=eB/2\mu c$称为$Larmor$频率。E_{n_rl}是屏蔽$Coulomb$场$V(r)$中粒子的能量本征方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(r)\right]\psi=E_{n_rl}\psi$$

的能量本征值。由于屏蔽$Coulomb$势只有空间转动不变性，其能量本征值与径向量子数n_r和角动量l都有关，因此不同于纯的$Coulomb$势，能级的简并度是n^2，而是$(2l+1)$重简并。可见原来中心力场中$(2l+1)$重简并的能级在z方向磁场的作用下，被分裂成了$(2l+1)$条能级，能级间隔就是$\hbar\omega_L=\frac{eB\hbar}{2\mu c}$。

由于能级分裂,相应光谱线也发生分裂。但由于存在选择定则$\delta m=0$，±1，故光谱线呈现相应地分裂成三条，频率(角频率)分别为$\omega\pm\omega_L\,(m=\pm1)$和$\omega\,(m=0)$。这就是正常的$Zeeman$效应。

我们现在直接从矢势$\vec{\mathbf{A}}$出发来研究这个问题。取$\vec{\mathbf{B}}=(0,0,B)$，$\vec{\mathbf{A}}=\left(-\frac{1}{2}By,\frac{1}{2}Bx,0\right)$，$\phi=0$，直接代入

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2\mu}\left(\hat{\vec{\mathbf{p}}}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)^2+V(r)\\&=\frac{1}{2\mu}\left[\left(p_x-\frac{eB}{2c}y\right)^2+\left(p_y+\frac{eB}{2c}x\right)^2+p_z^2\right]+V(r)\\&=\left[\frac{1}{2\mu}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+V(r)\right]+\frac{eB}{2\mu c}\left(p_yx-p_xy\right)+\frac{e^2B^2}{8\mu c^2}\left(x^2+y^2\right)\end{aligned}$$

第一项就是前面给的无磁场情况下的H_0，第二项括号中部分就是L_z，第三项也是与前面完全一样的，所以我们也可以直接从矢势$\vec{\mathbf{A}}$出发来解这个问题。

再进一步，我们考虑不同的规范，取$\vec{\mathbf{A}}=(-By,0,0)$，则$\vec{\mathbf{B}}=\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}}=(0,0,B)$，磁场方向也是指向$z$轴。因此

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\mu}\left(\hat{\vec{\mathbf{p}}}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)^2+V(r) \\ &= \frac{1}{2\mu}\left[\left(p_x-\frac{eB}{c}y\right)^2+p_y^2+p_z^2\right]+V(r) \\ &= H_0-\frac{eB}{\mu c}yp_x+0\left(B^2\right) \end{aligned}$$

对于这种规范，结果当然也会给出

$$E_{n_r lm}=E_{n_r l}+m\hbar\omega_L$$

但是我们很难通过这种规范直接给出能量的第二项。当然，我们可以通过如下的对比来说明这个结果：取规范$\vec{\mathbf{A}}=(0,Bx,0)$，由于$x$和$y$的交换对称性，两者实际上是一致的，而此时给出的结果是

$$H=H_0+\frac{eB}{\mu c}xp_y+0\left(B^2\right)$$

因此

$$H=H_0+\frac{eB}{2\mu c}\left(xp_y-yp_x\right)=H_0+\frac{eB}{2\mu c}L_z$$

从而给出结果

$$E_{n_r lm}=E_{n_r l}+m\hbar\omega_L$$

通过这个例子的讨论，我们主要想说明规范的选择可以任意，但是从计算的角度讲，选择合适的规范很重要。

2)自由电子在磁场中的运动— ***Landau***能级

对于自由电子在均匀磁场中的运动，显然有$V(r)=0$。同样假定磁场沿z方向，取$\vec{\mathbf{A}}=(-By,0,0)$，即所谓的$Landau$规范(参见$Landau$的量子力学)

$$H=H_0-\frac{eB}{\mu c}yp_x+\frac{e^2B^2}{2\mu c^2}y^2$$

此处我们并没有忽略B^2项，对于自由电子或者在强磁场下的电子，此项未必是小量，不可忽略。因为方程中不显含x，z，所以p_x和p_z与H对易，即p_x和p_z守恒。但要注意的是，守恒的是正则动量p，而不是机械动量P。对于z方向，正则动量和机械动量相同，于是只有z方向的速度恒定并可连续变化，但x方向的速度并不恒定。因此波函数可以写成

$$\psi=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_x x+p_z z\right)\right]\chi\left(y\right)$$

代入到能量本征方程$H\psi=E\psi$有

$$\begin{aligned} H_0\psi &= \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\left\{\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_x x+p_z z\right)\right]\chi\left(y\right)\right\} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_x x+p_z z\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial y^2}\chi-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\left[p_x^2+p_z^2\right]\left\{\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_x x+p_z z\right)\right]\chi\right\} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_x x+p_z z\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial y^2}\chi+\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_x x+p_z z\right)\right]\left(\frac{p_x^2}{2\mu}+\frac{p_z^2}{2\mu}\right)\chi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{eB}{\mu c}yp_x\psi &= i\hbar\frac{eB}{\mu c}y\frac{\partial}{\partial x}\left\{\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_x x+p_z z\right)\right]\chi\left(y\right)\right\} \\
&= i\hbar\frac{eB}{\mu c}y\left(\frac{i}{\hbar}p_x\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_x x+p_z z\right)\right]\chi \\
&= -\frac{eB}{\mu c}yp_x\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_x x+p_z z\right)\right]\chi
\end{aligned}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\chi''+\left(\frac{p_x^2}{2\mu}+\frac{p_z^2}{2\mu}\right)\chi-\frac{eB}{\mu c}yp_x\chi+\frac{e^2B^2}{2\mu c^2}y^2\chi=E\chi$$

$$\chi''+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[\left(E-\frac{p_z^2}{2\mu}\right)-\frac{p_x^2}{2\mu}-\frac{eB}{\mu c}yp_x\chi+\frac{e^2B^2}{2\mu c^2}y^2\right]\chi=0$$

$$\chi''+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[\left(E-\frac{p_z^2}{2\mu}\right)-\frac{\mu}{2}\left(\frac{p_x^2}{\mu^2}-\frac{2eB}{\mu^2 c}yp_x\chi+\frac{e^2B^2}{\mu^2 c^2}y^2\right)\right]\chi=0$$

$$\begin{aligned}
\frac{p_x^2}{\mu^2}-\frac{2eB}{\mu^2 c}yp_x\chi+\frac{e^2B^2}{\mu^2c^2}y^2 &= \frac{e^2B^2}{\mu^2c^2}\left(y^2-2\frac{c}{eB}yp_x+\frac{c^2}{e^2B^2}p_x^2\right) \\
&= \frac{e^2B^2}{\mu^2c^2}\left(y-\frac{cp_x}{eB}\right)^2
\end{aligned}$$

即

$$\chi''+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[\left(E-\frac{p_z^2}{2\mu}\right)-\frac{1}{2}\mu\omega_B^2\left(y-y_0\right)^2\right]\chi=0$$

其中，$y_0=-cp_x/eB$, $\omega_B=eB/\mu c$。上面的方程等同于*Schrödinger*方程中谐振子的运动方程，振动频率为ω_B。因此得到能量本征值为

$$E_n=\frac{p_z^2}{2\mu}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_B$$

其中第二项给出的能级对应垂直于磁场的平面运动的能量，称为*Landau*能级。对应的本征函数$\chi_n\left(y\right)$为

$$\chi_n\left(y\right)=\frac{\alpha_B^{1/2}}{\pi^{1/4}}\left(2^n n!\right)^{-1/2}\exp\left[-\frac{\alpha_B^2\left(y-y_0\right)^2}{2}\right]H_n\left(\alpha_B\left(y-y_0\right)\right)$$

其中$\alpha_B=\sqrt{\mu\omega_B/\hbar}$。

现在我们来讨论上述**能级的简并性**，显然E_n与$y_0\left(p_x\right)$无关，但$\chi_n\left(y\right)$则依赖于$y_0\left(p_x\right)$，而p_x的取值范围是$-\infty<p_x<\infty$，这意味着*Landau*能级是无穷度简并的。这里我们注意到一个有趣的现象，即在均匀磁场中运动的电子,可以出现在无穷远处($y_0\to\infty$)，即为非束缚态(x方向为平面波，也是非束缚态)，但电子的能级却是离散的。而通常一个二维非束缚态粒子的能量则是连续变化的。*Landau*能级对于理解整数量子Hall效应是很重要的，后者是指在低温下二维电子气在强磁场中出现的*Hall*电阻(电导)率的量子化现象。

对于这个问题，我们同样可以选择不同的规范来计算。假定选取规范$\mathbf{A}=\left(-\frac{1}{2}By,\frac{1}{2}Bx,0\right)$，则系统的*Hamiltonian*为

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2\mu}\left(\hat{\vec{\mathbf{p}}}-\frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)^2=\frac{1}{2\mu}\left[\left(\hat{p}_x-\frac{eB}{2c}y\right)^2+\left(\hat{p}_y+\frac{eB}{2c}x\right)^2+p_z^2\right] \\
&= \frac{1}{2\mu}\left(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2\right)+\frac{e^2B^2}{8\mu c^2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{eB}{2\mu c}\left(x\hat{p}_y-y\hat{p}_x\right)+\frac{\hat{p}_z^2}{2\mu} \\
&= \frac{1}{2\mu}\left(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2\right)+\frac{e^2B^2}{8\mu c^2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{eB}{2\mu c}L_z+\frac{\hat{p}_z^2}{2\mu}
\end{aligned}$$

方便起见，令$H' = H - \frac{\hat{p}_z^2}{2\mu}$，$\omega_L = eB/2\mu c = \frac{1}{2}\omega_B$称为$Larmor$频率，则

$$H' = H_0' + \omega_L L_z$$

其中

$$H_0' = \frac{1}{2\mu}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{1}{2}\omega_L^2\left(x^2 + y^2\right)$$

上式中ω_L的平方项来自于B^2项为反磁项，在$Zeeman$效应中，由于电子局限在原子内部运动，在通常实验室所用磁场强度下，反磁项很小，常忽略不计。但对于自由电子，或磁场极强(例如白矮星和中子星内)时，B^2项就必须考虑。上式中H_0'是一个二维各向同性谐振子的$Hamiltonian$，电子的能量本征态可取为守恒量完全集$(H, \hat{L}_z)$的共同本征态，即(采用平面极坐标)

$$\psi(\rho, \varphi) = R(\rho)\, e^{im\varphi} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

代入能量本征方程$H\psi = E\psi$，可求出径向方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{2}\mu\omega_L^2\rho^2\right] R(\rho) = (E - m\hbar\omega_L)\, R(\rho)$$

从而得到能量本征值为

$$\begin{aligned} E &= E_n = (n+1)\hbar\omega_L \\ n &= (2n_\rho + |m| + m) = 0, 2, 4, ... \qquad n_\rho = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

同样我们可以讨论其简并性，任意看出对于$m \leq 0$的态所对应的能量都是相同的，因此能级是无穷度简并的。这个结论也是当然的，物理结果应当不随规范的选择而改变。

n	E_n/ω_L	n_ρ	m
0	1	0	$0, -1, -2, ...$
2	3	0	1
		1	$0, -1, -2, ...$
4	5	0	2
		1	1
		2	$0, -1, -2, ...$
...	...	...	...

能量本征值中电子能量(> 0)可以看成电子在外磁场B(沿z方向)中感应而产生的磁矩μ_z与外磁场的相互作用$-\mu_z B$，而

$$\mu_z = -(2n_\rho + 1 + |m| + m)e/2\mu c$$

上式中的负号表示自由电子在受到外磁场作用时具有反磁性。

现在我们继续讨论$Landau$能级的简并度问题，如果是受限运动，能级的简并度会发生什么样的变化。

***Landau*能级的单位面积简并度：** 采用$Landau$规范，假定电子限制在箱子里运动，即局限于xy平面内的一个矩形$L_x \times L_y$中(面积$S = L_x L_y$)。要保证正则动量算符$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$为厄米算符，波函数需要满足周期性边界条件，即要求满足

$$p_x L_x/\hbar = 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, ...$$

$p_x = kh/L_x$，其取值是离散的，每间隔h/L_x出现一个可能值。因此，在某个间隔Δp_x内包含的p_x值(离散)可能个数为$(L_x/h)\,\Delta p_x (\Delta k = (L_x/h)\,\Delta p_x)$。另一方面，$y_0 = cp_x/eB$，$p_x$的可能取值还受到与$y_0$可能取值的限制，由$0 < y_0 < L_y \Longrightarrow 0 < p_x < eBL_y/c$，我们得到$\Delta p_x = eBL_y/c$。因此对于给定的$n$，$p_z$，$p_x$可能取值的个数，即能级的简并度

$$f = \frac{eB}{hc}S$$

如果$S \Longrightarrow \infty$，则能级的简并度为∞，这正是我们前面讲的均匀磁场中的自由电子的能级简并情况。对于限制在有限空间运动的电子，简并度随S的增大而增大，而单位面积的简并度

$$g = f/S = \frac{eB}{hc}$$

与磁场强度B成正比。

***Landau*能带**：现在考虑有相互垂直的均匀电场和磁场中的电子的运动。假定磁场B沿z方向，电场E沿y方向，电子是局限于xy平面内运动(二维量子系统)，并且选择*Landau*规范$\vec{\mathbf{A}} = (-By, 0, 0)$，则电子的*Hamiltonian*为

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\left[\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c}By\right)^2 + \hat{p}_y^2\right] + eEy$$

因为$\left[\hat{p}_x, \hat{H}\right] = 0$，但$\left[\hat{p}_y, \hat{H}\right] \neq 0$，能量本征态可以取为守恒量完全集$\left(\hat{H}, \hat{p}_x\right)$的共同本征态，即

$$\psi(x, y) = \exp(ip_x x/\hbar)\,\varphi(y) \qquad\qquad -\infty < p_x < \infty$$

代入本征值方程$\hat{H}\psi = \varepsilon\psi$，得到

$$\left\{\frac{1}{2\mu}\left[\left(p_x - \frac{e}{c}By\right)^2 + \hat{p}_y^2\right] + eEy\right\}\varphi(y) = \varepsilon\varphi(y)$$

其中ε是能量本征值。上式可以化为谐振子的能量本征值方程

$$\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{e^2B^2}{2\mu c^2}(y - y_0)^2\right]\varphi(y) = \left(\varepsilon - \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{e^2B^2}{2\mu c^2}y_0^2\right)$$

其中$y_0 = \frac{\mu c^2}{e^2B^2}\left(\frac{eB}{\mu c}p_x + eE\right)$。因此能量本征值为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,p_x} &= (n + 1/2)\,\hbar\omega_c + \frac{p_x^2}{2\mu} - \frac{e^2B^2}{2\mu c^2}y_0^2 \\ &= (n + 1/2)\,\hbar\omega_c - \frac{cEp_x}{B} - \frac{\mu c^2E^2}{2B^2} \qquad n = 0, 1, 2, ...\end{aligned}$$

其中$\omega_c = eB/\mu c$。

当电场$E = 0$时，上述结果退化为*Landau*能级的情况，如果在x方向的运动不受限制，p_x的取值为$(-\infty, \infty)$，y_0的取值也是$(-\infty, \infty)$，所以每条*Landau*能级的简并度都是∞。如在x方运动受限，假设粒子在xy平面内的面积S中运动，则原来的每一条*Landau*能级都将是f重简并的，这是前面讲的内容。

当电场存在的时候，ε_{n,p_x}依赖于n和p_x，能级简并度解除。同样假定在x方向的运动不受限制，p_x的取值为$(-\infty, \infty)$，此时每一条*Landau*能级都将展宽为一条连续变化的能带。如在x方运动受限，假设粒子在xy平面内的面积S中运动，则原来的每一条*Landau*能级都将分裂成f条分立的能级，构成一条能带— *Landau*能带。能带所包含的分立能级的数目为

$$f = \frac{eBS}{hc} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

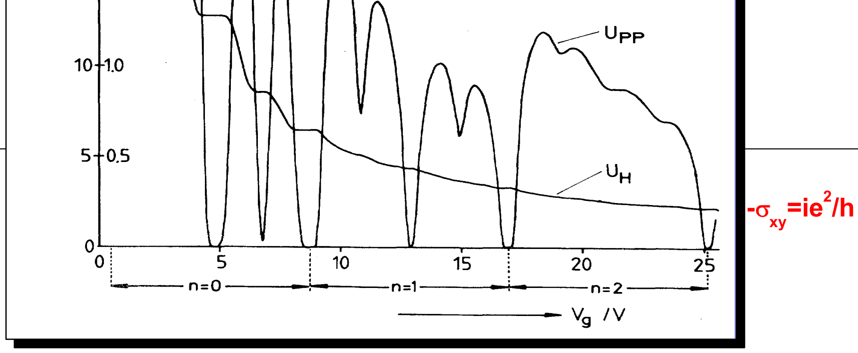

Figure 1: Recordings of the Hall voltage U_H and the voltage drop between the potential probes, U_{PP}, as a function of the gate voltage V_g at $T = 1.5K$. The constant magnetic field (B) is $18T$ and the source drain current I, is $1\mu A$. The sample size is $400\mu m \times 50\mu m$. [K. V. Klitzing, G. Dorda, and Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980)]

其中$\Phi = BS$为穿过xy平面内面积S的磁通量，$\Phi_0 = hc/e$为磁通量子(磁通的最小单位)。所以$Landau$能带所包含的能级数目就是通过面积S的磁通量子的数目。这也告诉大家**磁通是量子化**的。

$Landau$能级是等间距的，在加上垂直磁场的均匀电场E后，则形成等间距的$Landau$能带。处在能带内的电子是导电的，而处在能带间隙的电子是不参与导电。这正是整数量子$Hall$效应的理论基础。参见图 1.

10.3 均匀磁场中电子的运动— 有1/2自旋情况

电子具有内禀的(intrinsic)磁矩。在量子力学中用算符表示，它正比于自旋算符$\hat{\mathbf{s}}$，即

$$\hat{\mu} = -\, g_e \mu_B \hat{\mathbf{s}}/\hbar$$

其中$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$是$Bohr$磁子(magneton)，$g_e = 2$是$Landé$因子，可以直接从$Dirac$相对论量子力学波动方程导出。在量子电动力学(QED)中，因为电子与真空能量的电磁涨落相互作用，$g_e = 2$修正为2.002319304402，我们一般就取为2。负号可以理解为来自于电子带负电性，表明磁矩方向反平行于自旋方向。如果是正电子，则取正号。

其它基本粒子也具有磁矩，如质子和中子。引进核磁子(nuclear magneton)$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c}$,其中$m_p$是质子的质量.则质子的磁矩为$\hat{\mu} =2.79\mu_N \hat{\mathbf{s}}/\hbar$,正号可以理解为质子带正电,表明磁矩平行于自旋;中子的磁矩为$\hat{\mu} = -\, 1.91\mu_N \hat{\mathbf{s}}/\hbar$，反平行于自旋。

原子的磁矩则可以表示为

$$\hat{\mu} = -\, g_J \mu_B \hat{\mathbf{J}}/\hbar$$

其中g_J是$Landé$因子，负号来自于绕核旋转的是电子，带负电。原子内部有多个电子，总角动量的计算需要先计算每一个电子的自旋，总和得到总自旋；再将每一个电子的轨道角动量总和得到总轨道角动量，最后用角动量的耦合方法将总自旋和总轨道角动量总和得到原子的总角动量。对于不考虑自旋的轨道磁矩，则$\hat{\vec{\mu}}_L = -\frac{e}{2\mu c}\hat{\vec{\mathbf{L}}}$。

1. 无自旋轨道耦合(SOC)的情况，

前面讲过带电粒子的轨道磁矩，对于电子可以表示为

$$\hat{\vec{\mu}}_L = -\frac{e}{2\mu c}\hat{\vec{\mathbf{L}}}$$

另一方面，自旋算符的性质同于角动量算符。因此，与角动量相类似，一个电子带有自旋，则有"内在的($intrinsic$)"磁矩，对应的量子力学算符$\hat{\vec{\mu}}_s$正比于自旋算符$\hat{\vec{\mathbf{S}}}$，可以表示为

$$\hat{\vec{\mu}}_s = -g\frac{e}{2\mu c}\hat{\vec{\mathbf{S}}}$$

与轨道磁矩相比，多了一个$g = 2.0023193 \approx 2$因子。令$\mu_B = \frac{e\hbar}{2\mu c}$，即$Bohr$磁子(Magneton)，则电子自旋磁矩的大小就是$Bohr$磁子的大小，而轨道磁矩则是$Bohr$磁子的整数倍。对于无自旋轨道耦合的情况，取$\vec{\mathbf{B}} = (0, 0, B)$并且忽略$B^2$的高阶项，$Hamiltonian$只是变成了

$$H = H_0 + \frac{eB}{2\mu c}\left(L_z + 2S_z\right)$$

选取守恒量完全集(H, L^2, L_z, S_z)，

$$E_{n_r lm} = E_{n_r l} + (m+1)\,\frac{eB\hbar}{2\mu c} = E_{n_r l} + (m+1)\,\hbar\omega_L$$

2. 有自旋轨道耦合的情况

假定磁场仍然沿z方向，此时$Hamiltonian$为

$$H = H_0 + \frac{eB}{2\mu c}(L_z + 2S_z) + \xi(r)\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}}$$

其中$\xi(r) = \frac{e^2}{2\mu^2 c^2} - \frac{1}{r^3}$是自旋轨道耦合的强度。如果只是研究给定量子数$n,l$状态子空间的问题，则$\xi_{nl} = \langle nl|\xi(r)|nl\rangle$变成一个常数，令$\alpha = \xi_{nl}\hbar^2$和$\beta = \frac{eB\hbar}{2mc}$，两者都是能量的量纲，则

$$H = H_0 + \alpha\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}} + \beta(L_z + 2S_z)$$

其中角动量$\vec{\mathbf{L}}$和$\vec{\mathbf{S}}$都已经取为无量纲的量。现在我们来求解此Hamiltonian。

引入升降算符

$$L_\pm = L_x \pm iL_y \qquad S_\pm = S_x \pm iS_y = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y) = \frac{1}{2}\sigma_\pm$$

这里，$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$是$Pauli$矩阵的表示形式，则

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2}\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\sigma} = \frac{1}{2}L_z\sigma_z + \frac{1}{2}(L_x\sigma_x + L_y\sigma_y) \\ &= \frac{1}{2}L_z\sigma_z + \frac{1}{4}(L_-\sigma_+ + L_+\sigma_-) \end{aligned}$$

即

$$H = H_0 + \beta L_z + \left(\frac{\alpha}{2}L_z + \beta\right)\sigma_z + \frac{\alpha}{4}(L_-\sigma_+ + L_+\sigma_-)$$

由于H中包含了$\alpha\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}} + \beta L_z + 2\beta S_z$，于是，除能量之外，$L^2$，$S^2$以及$J_z$守恒，但$\left[J^2, S_z\right] \neq 0$，故$J^2$不守恒。因此，好量子数为$(nlsm_j)$，但不包含$j$。这允许我们在这几个好量子数分别取确定值的任一子空间中考虑问题($j = l \pm 1/2$，取两个可能的值)。这时定态方程为

$$\begin{pmatrix} H_0 + \beta L_z + \left(\frac{\alpha}{2}L_z + \beta\right) & \frac{\alpha}{2}L_- \\ \frac{\alpha}{2}L_+ & H_0 + \beta L_z - \left(\frac{\alpha}{2}L_z + \beta\right) \end{pmatrix}|nlm_j\rangle = E\,|nlm_j\rangle$$

由于m_j为守恒量子数，现取为固定值，于是应有

$$|nlm_j\rangle = \begin{pmatrix} c_1\,|nlm\rangle \\ c_2\,|nl, m+1\rangle \end{pmatrix} \qquad m = m_j - 1/2$$

其中c_1和c_2是待定系数。代入方程，并且令$E' = E - E_{nl}$，得到本征方程

$$\begin{cases} \left[\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)m + \beta - E'\right]c_1 + \frac{\alpha}{2}\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}c_2 = 0 \\ \frac{\alpha}{2}\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}c_1 + \left[\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)(m+1) - \beta - E'\right]c_2 = 0 \end{cases}$$

解得能量本征值为

$$E^\pm = E_{nl} + m\beta + \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha\beta(2m+1) + \beta^2}$$

系数为

$$\begin{cases} c_1^\pm = \pm\left\{\frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{\alpha(m+1/2)+\beta}{\sqrt{\alpha^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha\beta(2m+1) + \beta^2}}\right]\right\}^{1/2} \\ c_2^\pm = \left\{\frac{1}{2}\left[1 \mp \frac{\alpha(m+1/2)+\beta}{\sqrt{\alpha^2\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha\beta(2m+1) + \beta^2}}\right]\right\}^{1/2} \end{cases}$$

讨论：

(1) $\beta=0$，纯自旋轨道耦合的情况，则

$$E^{\pm}=E_{nl}+\begin{cases} l\alpha/2 & j=l+1/2 \\ -(l+1)\alpha/2 & j=l-1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1^+=\sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} \\ c_2^+=\sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1^-=-\sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} \\ c_2^-=\sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} \end{cases}$$

这显然与前面讲电子自旋时候角动量耦合—自旋轨道耦合时的结果是一致的。

(2) $\beta\ll\alpha$，弱磁场情况，$\vec{\mathbf{L}}$和$\vec{\mathbf{S}}$对外磁场取向的附加能远小于自旋-轨道耦合能。这就是考虑自旋-轨道耦合后导致的反常$Zeeman$效应。保留至β的一阶小量，

$$E^{\pm}=E_{nl}+\begin{cases} \frac{l}{2}\alpha+\frac{2l+2}{2l+1}\left(m+\frac{1}{2}\right)\beta & j=l+1/2 \\ -\frac{(l+1)}{2}\alpha+\frac{2l}{2l+1}\left(m+\frac{1}{2}\right)\beta & j=l-1/2 \end{cases}$$

这个结果也可以用一级微扰论得到，附加的项是$\beta\left(L_z+2S_z\right)=\beta\left(J_z+S_z\right)$，取耦合基矢$|nljm_j\rangle$对外磁场求一阶微扰可得。所谓反常$Zeeman$效应是指在弱磁场中的原子，由于磁场足够弱，因而自旋轨道耦合能量不能忽略；原子能级的精细结构因弱磁场的存在而进一步发生分裂。

(3) $\beta\gg\alpha$，强磁场情况，保留至α的一阶小量，得到

$$E^{\pm}=E_{nl}+\begin{cases} (m+1)\beta+\frac{1}{2}m\alpha \\ m\beta-\frac{1}{2}(m+1)\alpha \end{cases}$$

这相当于在不考虑自旋-轨道耦合($\alpha=0$)，只剩$\beta\left(L_z+2S_z\right)$项基础上，选取无耦合表象基矢对自旋-轨道耦合效应作一阶微扰计算的结果，即

$$\begin{cases} \left\langle m,\frac{1}{2}|\alpha\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}}|m,\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{2}m\alpha & j=l+\frac{1}{2},m_j=m+\frac{1}{2} \\ \left\langle m+1,-\frac{1}{2}|\alpha\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}}|m+1,-\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{1}{2}(m+1)\alpha & j=l-\frac{1}{2},m_j=m+\frac{1}{2} \end{cases}$$

10.4 Aharonov-Bohm 效应

AB效应是一种表面看来很奇异的量子效应，它表明在某些电磁过程中，具有局限性质(因为是关于空间坐标微商)的电磁场场强不能有效地描述带电粒子的量子行为。它可用如图 2所示的理想实验来说明。在电子双缝实验的缝屏后面两缝之间放置一个细螺线管。相干电子束在S点分裂成两束，分别经过路径1和2，在屏P上S'点重新汇聚。通电后管内$\vec{\mathbf{B}}\neq0$，管外$B=0$，但矢势$\vec{\mathbf{A}}\neq0$。理论分析表明，相对于没通电的情况来说，通电后，接受屏上的干涉花样所有极值的位置都发生了移动，电流改变峰值位置跟随改变。电流的改变显然是改变了螺线管内磁场的强度。按照经典的理解，在电子走过的路径上磁场

强度为零，因此电子并不受到磁场的作用，不改变运动轨迹。但实验结果显然表明磁场对电子的运动产生了影响。下面对此作相应的理论分析。

由于两个缝是相干分解，不失一般性，可以假定电子波函数在缝1和2处的位相相等。通电前，电子的运动方程可以表示为

$$\frac{p^2}{2m}\psi_0(\vec{\mathbf{r}}t) = E\psi_0(\vec{\mathbf{r}}t) \qquad \psi_0(\vec{\mathbf{r}}t) = \varphi_0(\vec{\mathbf{r}})\, e^{-iEt/\hbar}$$

因此在S'点的振幅以表示为

$$\varphi_0(S') = \varphi_0^{(1)}(S't) + \varphi_0^{(2)}(S't)$$

通电后，电子的运动方程可以表示为

$$\frac{\left(\vec{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\vec{\mathbf{A}}\right)^2}{2m}\psi(\vec{\mathbf{r}}t) = E\psi(\vec{\mathbf{r}}t) \qquad \psi(\vec{\mathbf{r}}t) = \varphi(\vec{\mathbf{r}})\, e^{-iEt/\hbar}$$

可以得到

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_{1,2}\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}')\cdot d\vec{\mathbf{r}}'\right)\varphi_0(\vec{\mathbf{r}})$$

因此在S'点的振幅以表示为

$$\begin{aligned}
\varphi(S') &= \varphi^{(1)}(S't) + \varphi^{(2)}(S't) \\
&= \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_1 \vec{\mathbf{A}}\cdot d\vec{\mathbf{l}}\right)\varphi_0^{(1)}(S't) + \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_2 \vec{\mathbf{A}}\cdot d\vec{\mathbf{l}}\right)\varphi_0^{(2)}(S't) \\
&= \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_1 \vec{\mathbf{A}}\cdot d\vec{\mathbf{l}}\right)\left[\varphi_0^{(1)}(S't) + \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\oint \vec{\mathbf{A}}\cdot d\vec{\mathbf{l}}\right)\varphi_0^{(2)}(S't)\right]
\end{aligned}$$

上式中中括号外面的位相因子无可观测的物理效应，只需考虑中括号内的部分，可以看到$\varphi_0^{(2)}(S't)$前面多了一个相位因子，改变了两束电子的相对位相差，从而导致了双缝干涉峰值位置的改变。这个相位差$\delta\phi$可以表示为

$$\delta\phi = \frac{e}{\hbar c}\oint \vec{\mathbf{A}}\cdot d\vec{\mathbf{l}} = \frac{e}{\hbar c}\iint\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}}\right)\cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{e}{\hbar c}\Phi = 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}$$

其中Φ和Φ_0分别为通过回路所包围面积的磁通和磁通量子。随磁场强度(电流大小)改变而变化，干涉花纹也随之变化。

这个效应就是*Aharonov-Bohm*效应(AB效应)，是一个典型的量子效应，无法在经典物理中找到对应。这也说明电磁势有直接的可观测的物理效应。在经典物理中引入电磁势表征电磁场强度，只为数学上的方便，并不具有物理意义。

本章拟用6 (3×2) 课时

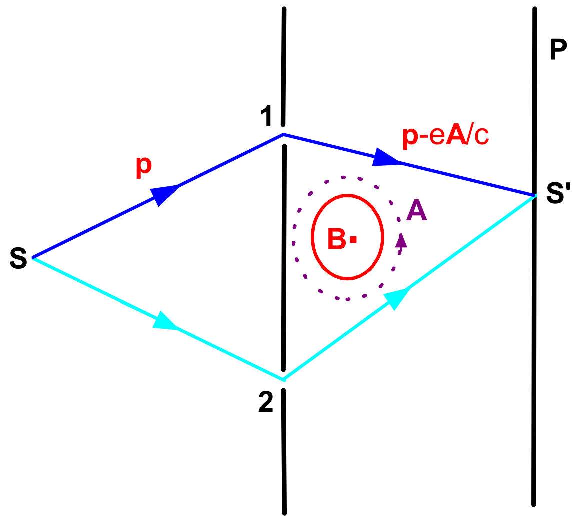

Figure 2: Schematic diagram of AB effect