第一章

绪论

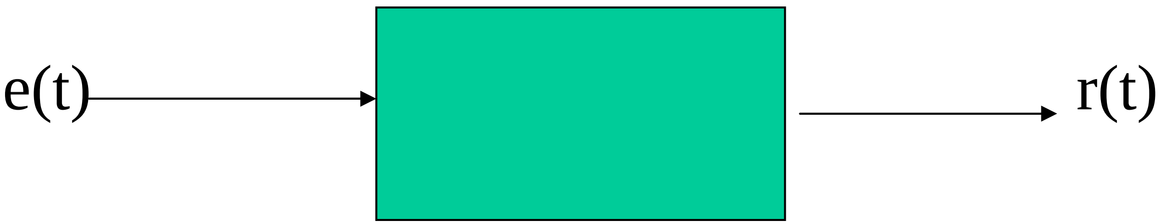
1.0 前言

- 概述
  - 本科生专业基础课
  - 主要研究信号与系统的基本概念和基本分析方法
  - 数字信号处理（DSP）的基础
  - 数学基础与物理基础
    - 大学数学、数学物理方法
    - 电路分析基础
  - “Signals & Systems”与“Digital signal processing”
    - MIT的A.V. Oppenheim，Dep. Of Electrical Engineering & Computer Science


MASSACHVSETTS · INSTITVTE · OF · TECHNOLOGY
WILLIAM BARTON ROGERS FOVNDER

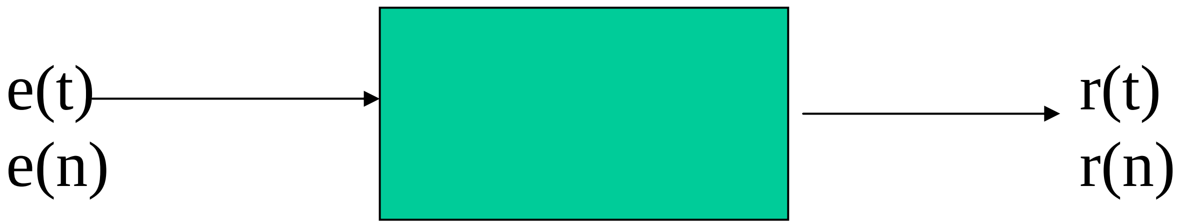

MASSACHVSETTS INSTITVTE OF TECHNOLOGY

– 主要用途
  - 分析方法
    - 用信号与系统的概念与分析方法来研究各种信号与系统
      - » 通讯、电路设计、声学、语音处理、地震、化学过程
    - 不同系统的共同点：
      - » 信号总是一个或几个变量的函数；
      - » 系统总是对该信号作出响应产生另一信号



语音系统

- 系统设计
  - 模拟、数字滤波器
  - LP，HP，BP



- 信号处理
  - 语音增强 Speech signal enhancement
  - 图象增强 Image signal enhancement

– 课程安排
- 平时作业
- 期中考试
- 期终考试

1.1　信号的描述及分类

- 信号
  - 信息：对接收者来说未知的消息
  - 消息：表达信息的某种客观报道
    - 一篇文章、一则广播、一幅图像等
    - 知道的信息
  - 信号是消息的表现形式，消息是信号的内容
    - 广播（电和声）-------调制和解调
    - 电视图像（光和声）
  - 信号是带有消息的随时间变化的物理量
  - 本书研究：电信号（随时间变化的电压或电流）

- 信号的描述和分类
  - 信号的数学模型：时间函数
  - 信号的分类
    - 确定信号与随机信号
      - 确定信号：确定的时间函数表示（正弦信号）
      - 随机信号：具有不可予知的不确定的信号
        声纳信号、噪声信号（概率统计方法－随机信号处理）
    - 周期信号与非周期信号
      - 周期信号：依一定时间间隔（T），周而复始，且无始无终的信号

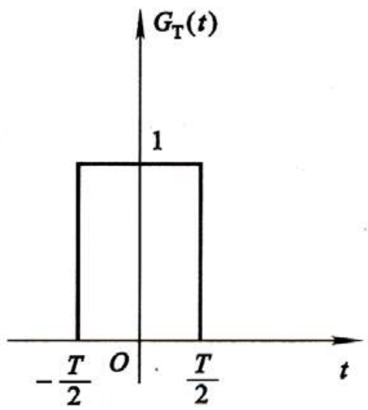
        $f(t)=f(t+nT)\quad \mathrm{n}=0,\pm1,\pm2,\ldots$

        $S(t)=A\sin\omega t, T=2\pi/\omega$

      - 非周期信号：时间上不具有周而复始性质的信号
        时限与非时限信号

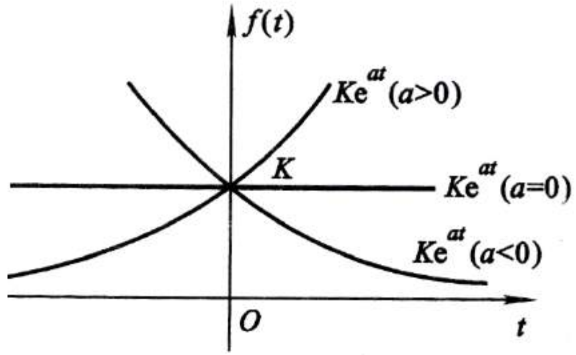
$f(t)=e^{at}, a$为实数－非时限信号

$$G_\tau(t)=\begin{cases}A,|t|\le\tau\\0,|t|>\tau\end{cases}$$－时限信号



- 模拟信号、连续时间信号、离散时间信号、数字信号
  - 模拟信号：在规定的连续时间内，信号在一定的范围内可连续地取任意值
    时间连续、幅度连续
  - 连续时间信号：连续时间范围内所定义的信号
    时间连续
  - 离散时间信号：时间上被量化的信号
    幅值可连续，也可离散，时间离散
  - 数字信号：时间与幅度均被量化的信号
    时间离散、幅度离散
- 本书前一部分讨论连续时间信号，后一部分讨论离散时间信号

- 几种典型信号
  - 指数信号



$$f(t) = Ke^{\alpha t}$$

$$= Ke^{\pm\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \frac{1}{|\alpha|}$$

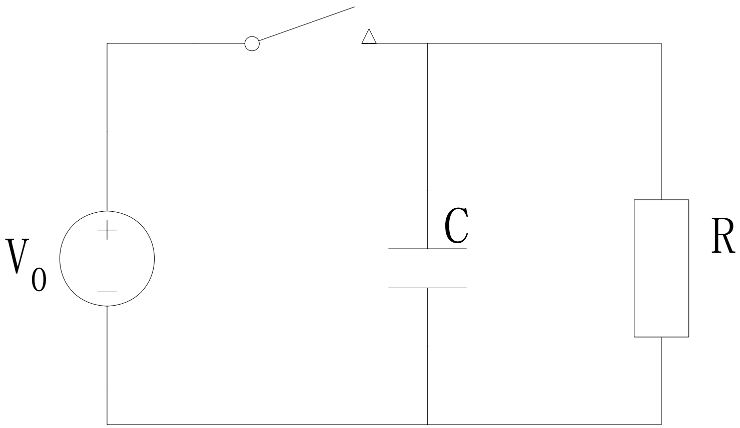
时间常数：反映了信号增长或衰减的速率

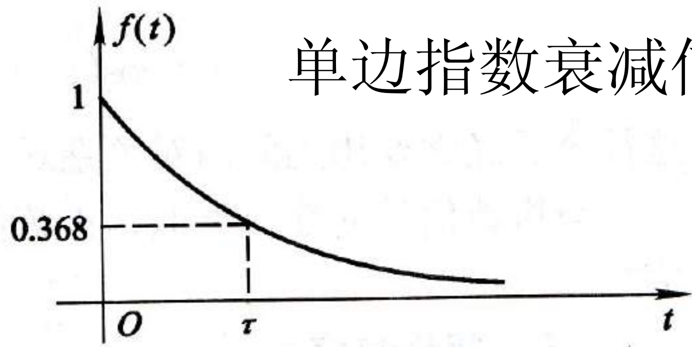
τ越大，速率越慢

$$V_c = V_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$t = 0, V_c / V_0 = 1$$

$$t = \tau, V_c / V_0 = 1/e = 0.368$$

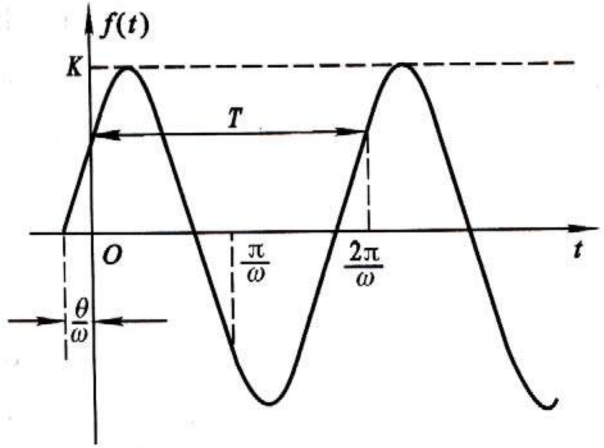




单边指数衰减信号

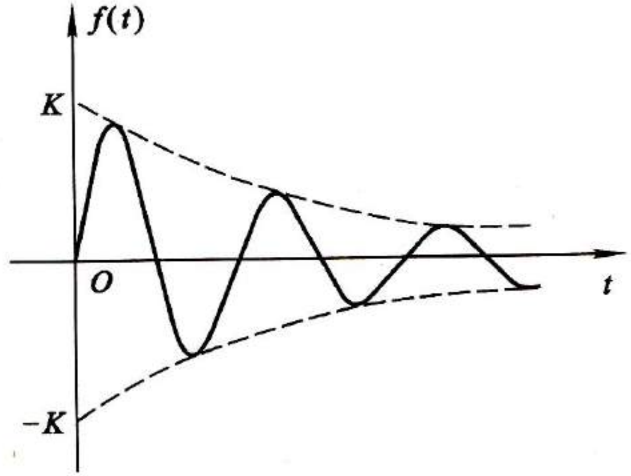
– 正（余）弦信号

$$f(t) = k\sin(\omega t - \theta)$$



– 指数衰减的正弦信号

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ke^{-\alpha t}\sin(\omega t) & t \geq 0 \end{cases}$$



– 复指数信号

- 分解为实、虚两部分
  实部包含余弦信号，
  虚部包括正弦信号

$$s = \sigma + j\omega$$

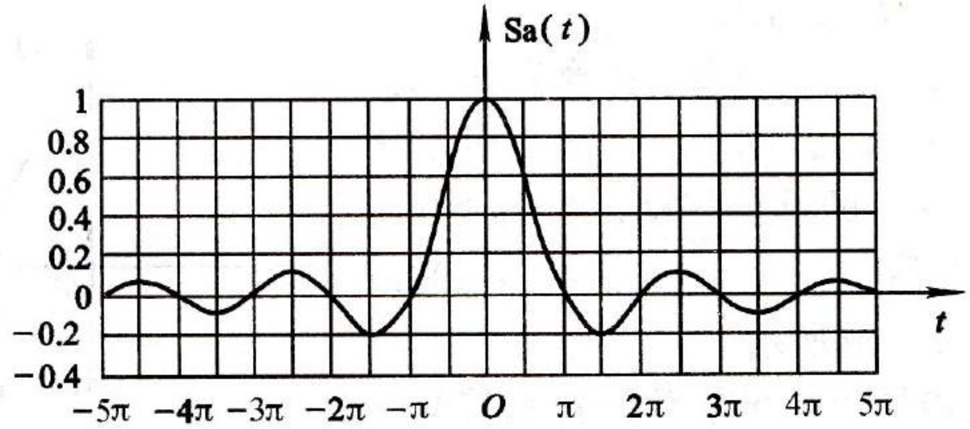
$$f(t) = Ae^{(\sigma + j\omega)t} = Ae^{\sigma t}e^{j\omega t} \leftarrow \cos\omega t + j\sin\omega t$$

$$= Ae^{\sigma t}\cos\omega t + jAe^{\sigma t}\sin\omega t(\sigma > 0, \sigma < 0)$$

– 抽样信号

$$Sa(t)=\frac{\sin t}{t}$$

$$Sinc(t)=\frac{\sin \pi t}{\pi t}$$



$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau)\frac{\sin \omega(t-n\tau)}{\omega(t-n\tau)}$$ ← 抽样定理

- 偶对称函数
- 零点t=±π, ±2π,… ±nπ

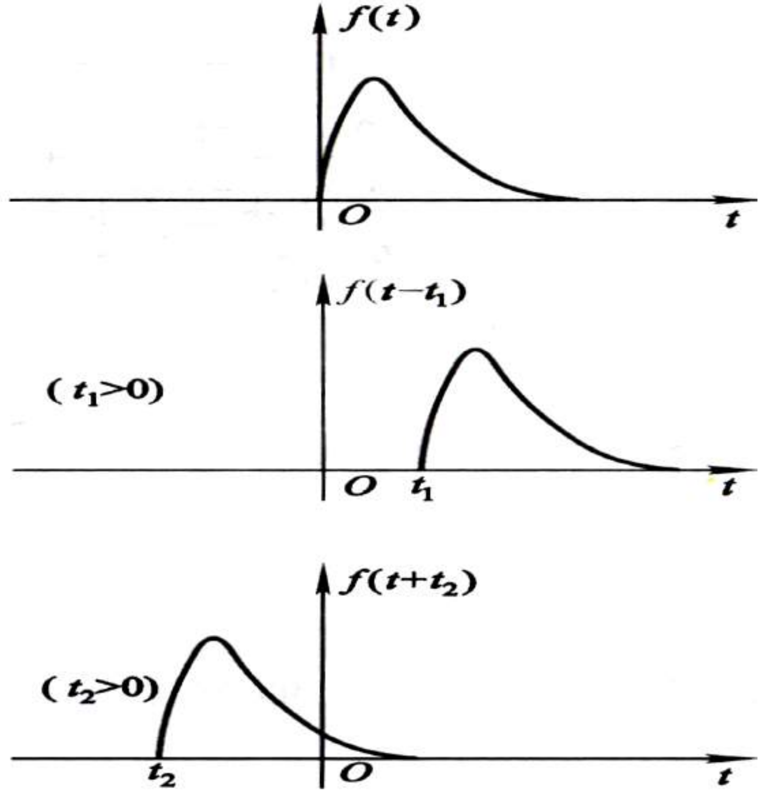
$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t)dt=\pi, \int_{0}^{\infty} Sa(t)dt=\frac{\pi}{2}$$

1.2　信号的运算

- 信号传输中需各种运算，主要包括
  - 移位（时移或延时）
  - 反褶
  - 尺度变换
  - 微分、积分
  - 两信号的相加或相乘
- 移位　$f(t+t_0)$

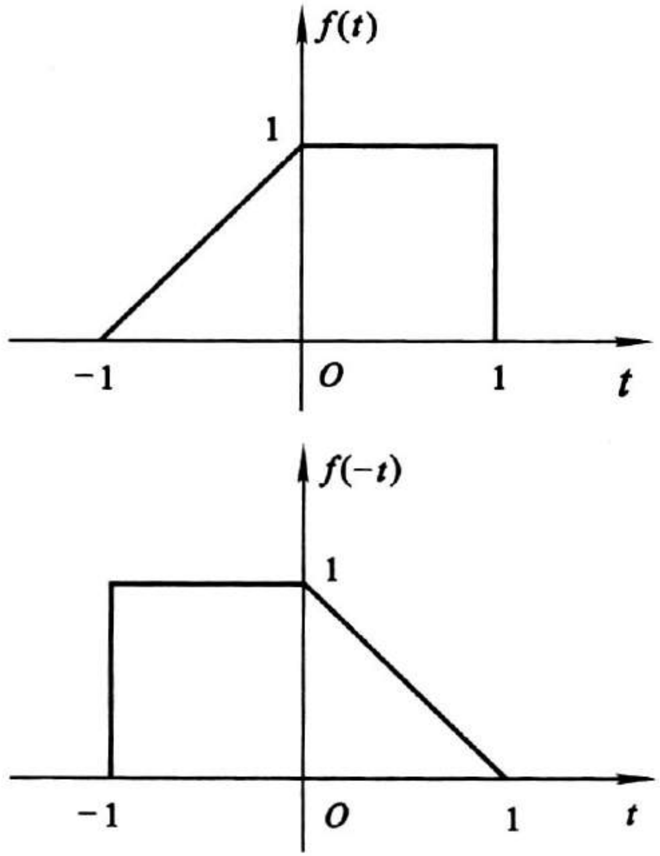
  $t_0>0$,信号左移

  $t_0<0$,信号右移



• 反褶

$$f(-t)$$

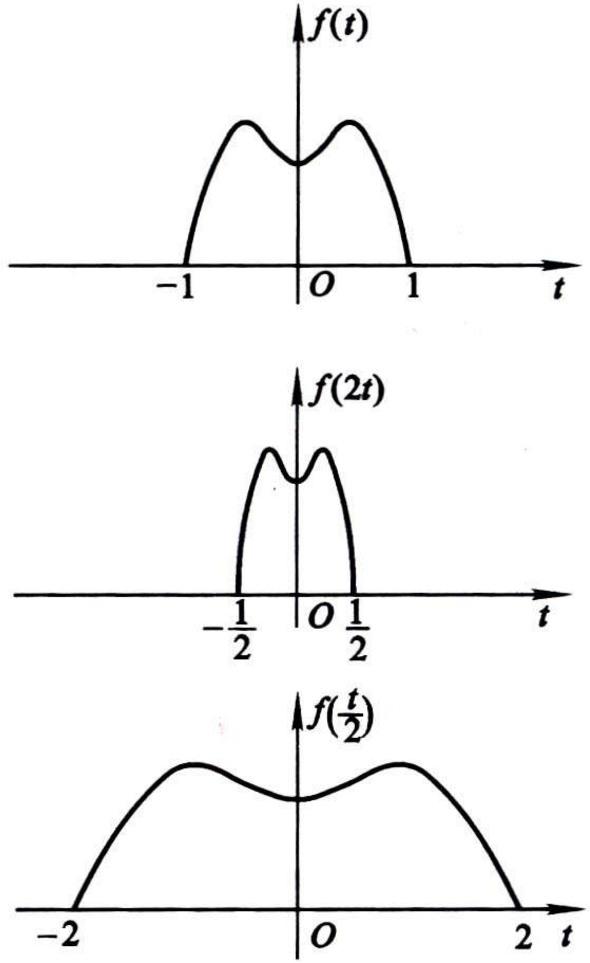


- 尺度变换

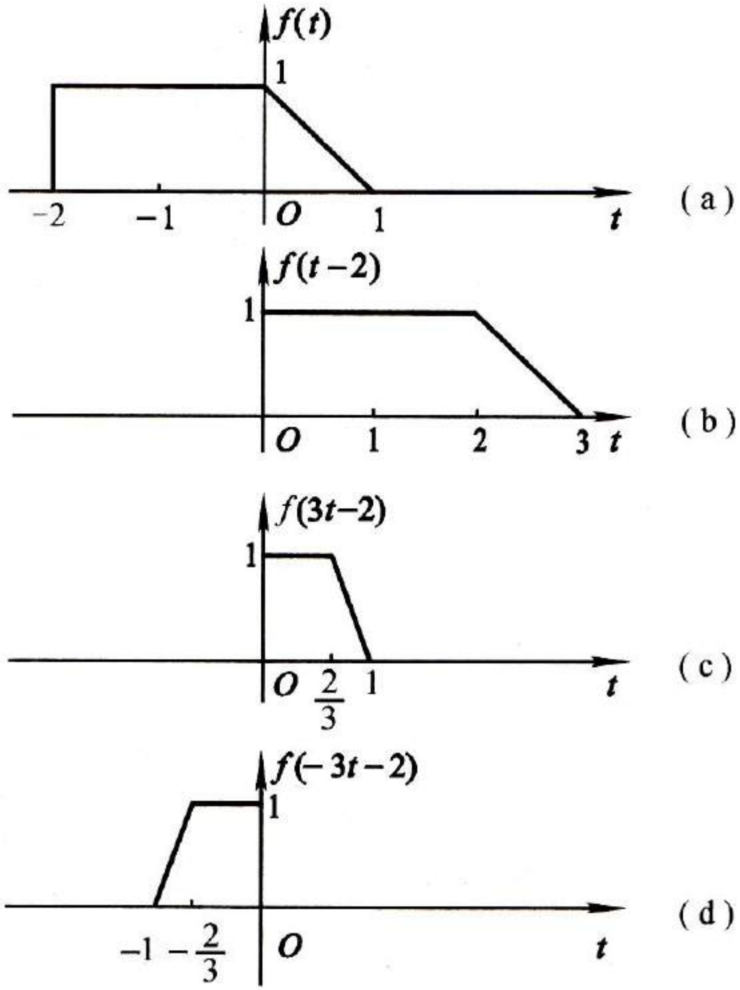
$f(at)$

$a > 1$　波形压缩

$a < 1$　波形扩展



例：已知f(t)的波形，试画出f(-3t-2)的波形



时移

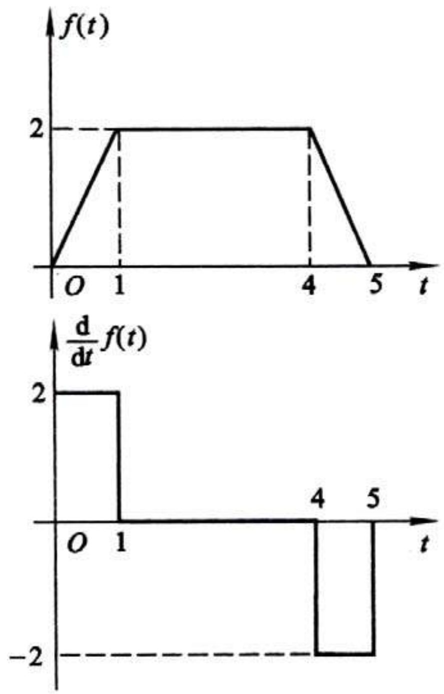
尺度

反褶

尺度 → 时移 → 反褶

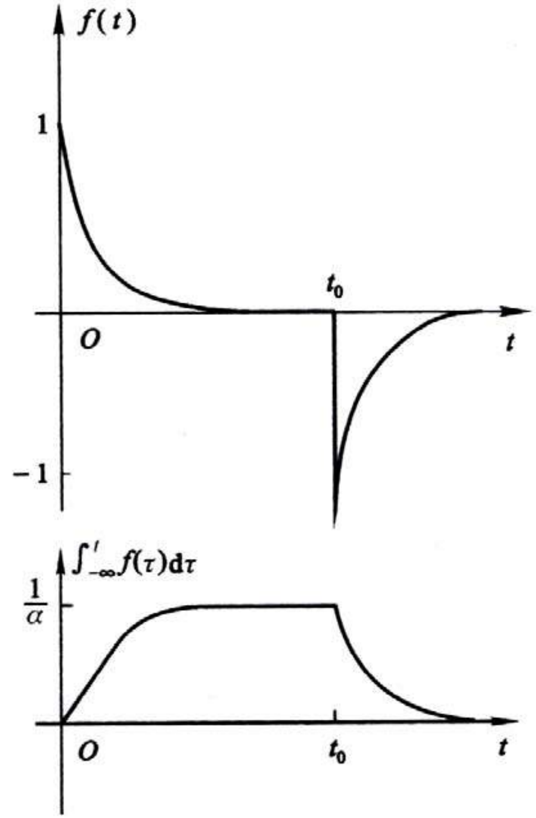
- 微分
  - 突出显示它的变化部分（图象边缘）

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$$



- 积分
  - 与微分相反（毛刺噪声）

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$



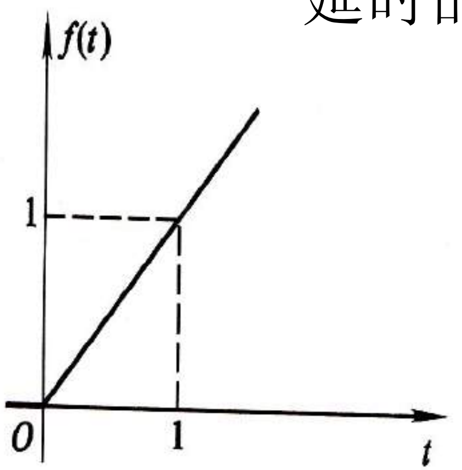
1.3　奇异信号

- 奇异信号：函数本身或导数，积分不连续
  - 单位冲激信号与阶跃信号

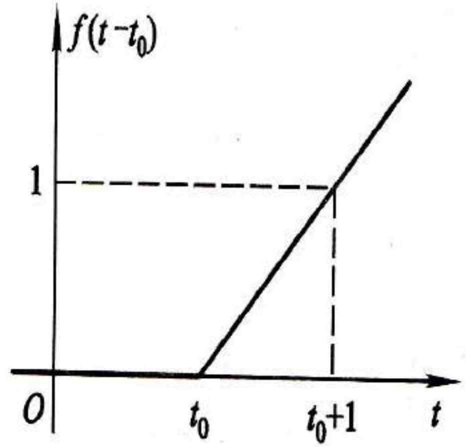
1、单位斜变信号（R(t)）

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq 0\end{cases}$$

$$\frac{df(t)}{dt}=1\text{单位斜变}$$

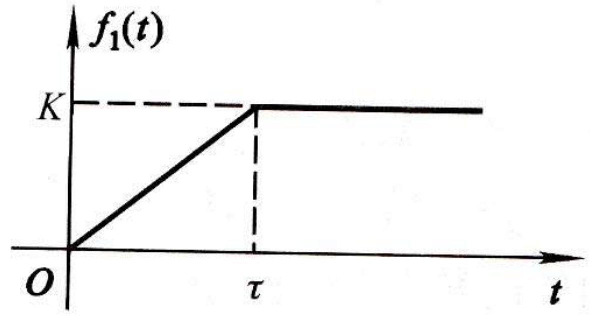


延时的单位斜变信号



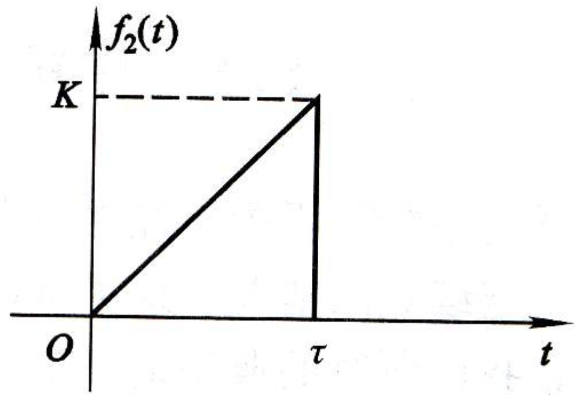
- 截平的斜变信号

$$f_1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{K}{\tau}t & 0\le t\le\tau\\ K & t\ge\tau\end{cases}$$



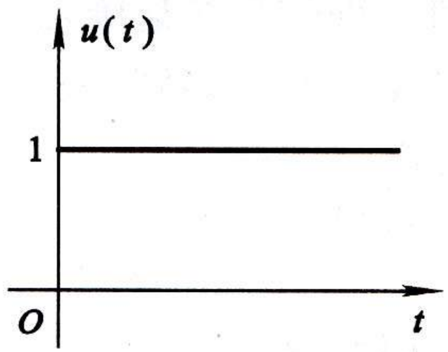
- 三角形脉冲信号

$$f_2(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{K}{\tau}t & 0\le t\le\tau\\ 0 & t\ge\tau\end{cases}$$

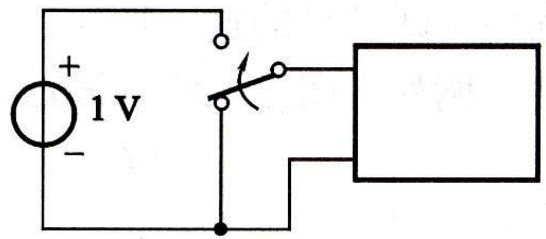


2、单位阶跃信号 (unit step signal)

$$U(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

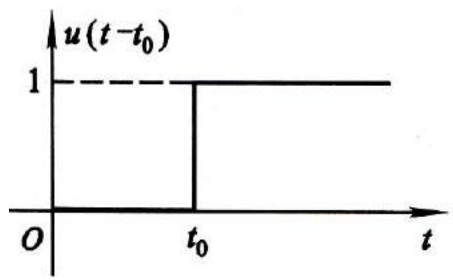


(a)



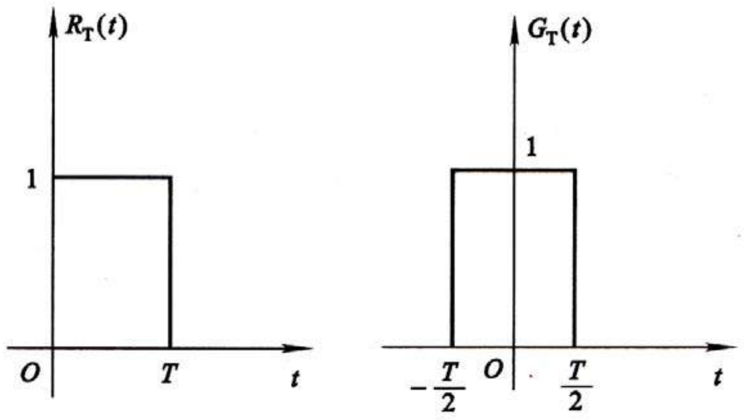
(b)

- 延时的单位阶跃信号
- 与单位斜变信号关系



$$\frac{dR(t)}{dt}=U(t),\frac{dU(t)}{dt}=\delta(t)$$

- 用阶跃信号表示其它信号
  - 矩形脉冲信号



(a) (b)

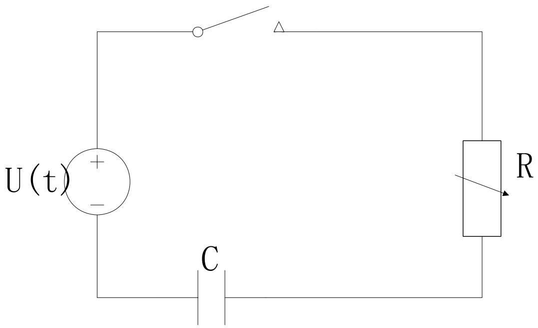
$$R_2(t)=\begin{cases}\frac{K}{\tau}R(t), t\le\tau\\ 0, t>\tau\end{cases}$$

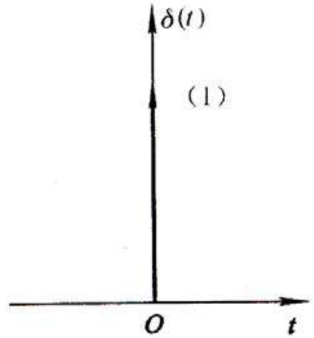
R$_2$(t)的描述?

$$G_1(t)=U(t)-U(t-\tau)$$

$$G_2(t)=U(t+\frac{\tau}{2})-U(t-\frac{\tau}{2})$$

3、单位冲激信号 (Unit impulsive signal)





$i_c(0+) = 1/R$　充电电流指数衰减至0

$q = CV_C$　充电电荷从0上升至C

$q_t = \int_{-\infty}^{t} i_c(\tau)d\tau$　R越小，充电电流越大

$q = CV_C \to C$　与R无关

$R \downarrow \to 0, \tau = RC \downarrow \to 0,$

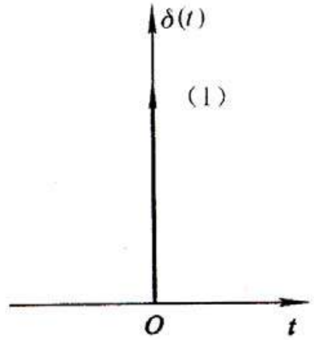
充电电流无限大，时间无限短的脉冲

充电电荷一跃为C, 无法用积分表示

$$i_c(t) = C\delta(t)$$

- 单位冲激信号：强度很大，但存在时间很短，无法衡量，但其积分是确定的

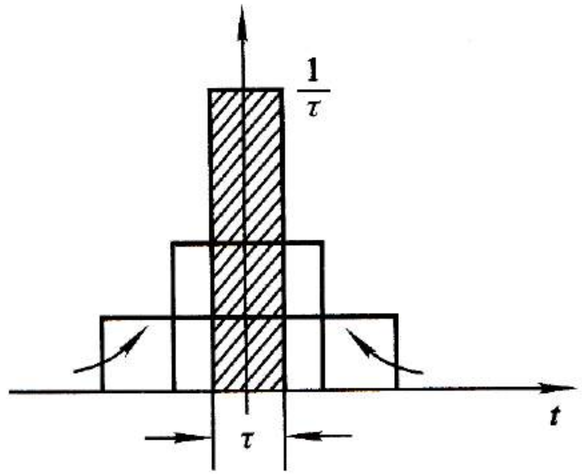
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \qquad \mathrm{t} \neq 0 \end{cases}$$



- 真正的冲激信号不可实现
  - 集中在极小时间的物理量
  - 其积分值由极限的方法保持常数，如1
  - 变化细节无关紧要

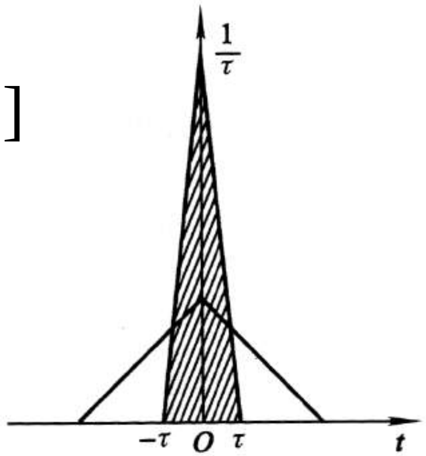
- 矩形脉冲—冲激函数

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}[U(t+\frac{\tau}{2})-U(t-\frac{\tau}{2})]$$



- 三角形脉冲—冲激函数

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}(1-\frac{|t|}{\tau})[U(t+\tau)-U(t-\tau)]$$



- 延时的冲激信号

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t\text{-}t_0)dt=1\\ \delta(t-t_0)=0 \qquad \mathrm{t}\neq t_0\end{cases}$$

- 冲激信号的性质
  - 与阶跃信号的关系

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = U(t)$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = \delta(t)$$

$$t > 0\text{时}, \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = 1$$

$$t < 0\text{时}, \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = 0$$

$$\text{对于}u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = u(t), \frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

- 冲激信号的性质
  - 抽样特性
    - 对于任何在原点连续的函数f(t)与冲激函数相乘，其面积积分等于f(0)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

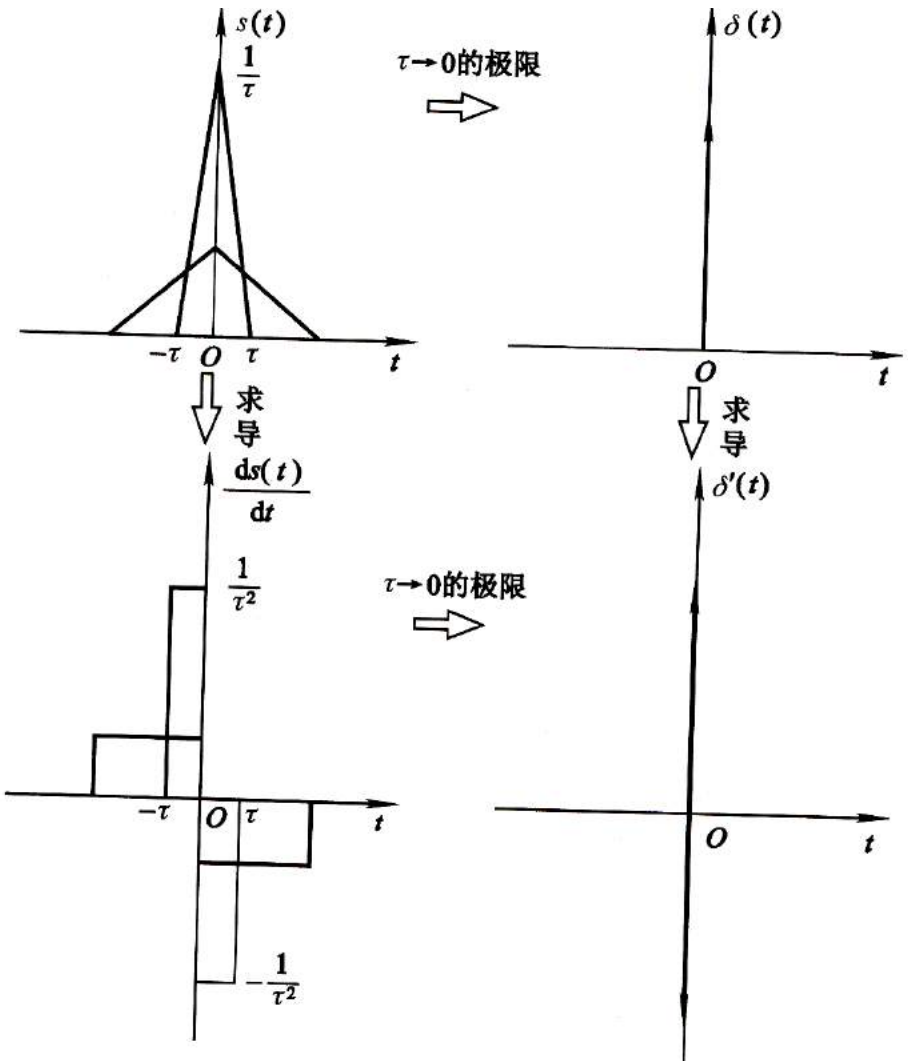
  - 偶函数

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t) f(t)dt, \tau = -t$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} \delta(\tau) f(-\tau) - d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(-\tau)d\tau = f(0)$$

– 冲激偶信号 $\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}(1-\frac{|t|}{\tau})[U(t+\tau)-U(t-\tau)]$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = f(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t)dt$$

$$= -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t)dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t-t_0)dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0)$$

1.4 信号的分解

- 信号的常用表示方式：把任意信号看作为有限个或无限个典型信号的线性叠加
- 信号分解为比较简单的信号分量之和
- 傅氏分析

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

1、信号的分解

– 分解为直流和交流

$$f(t) = f_D(t) + f_A(t)$$

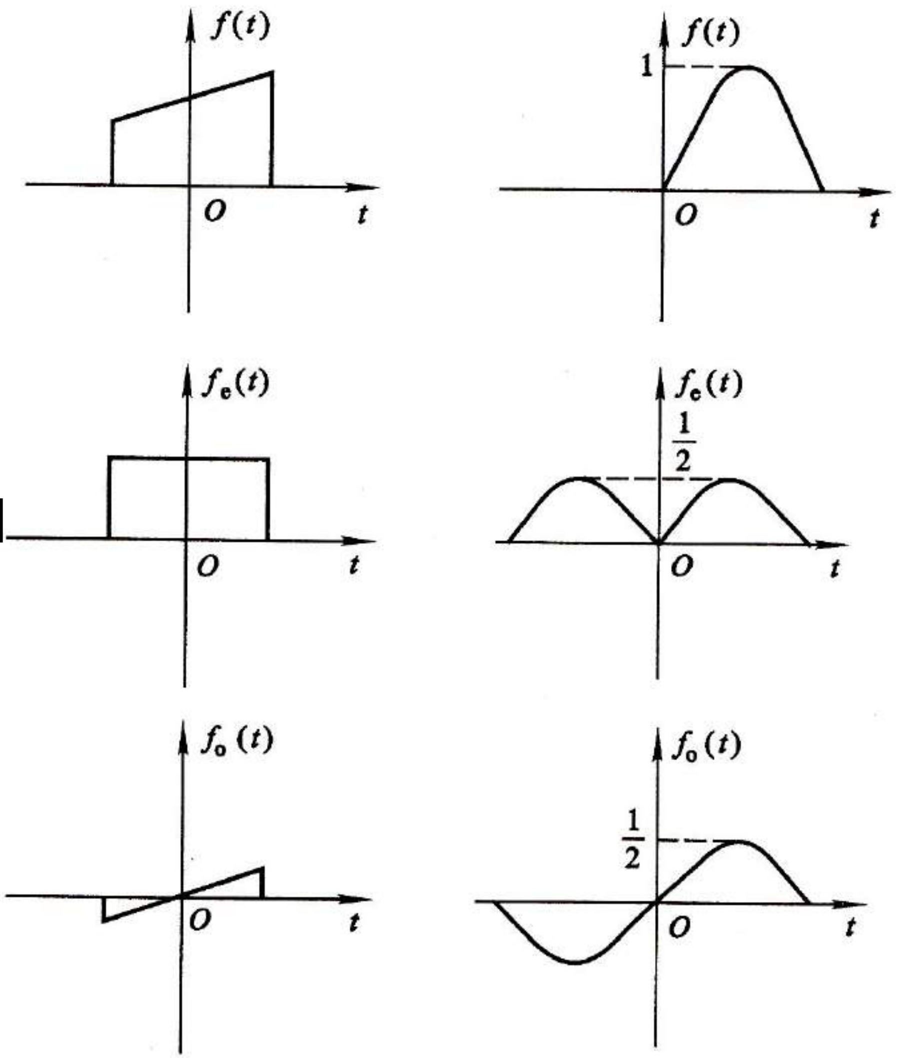
– **分解为奇偶分量**

$$f(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$

$$= f_e(t) + f_o(t)$$

– 分解为实部虚部

$$f_C(t) = f_R(t) + jf_I(t)$$



– 信号分解为脉冲分量之和

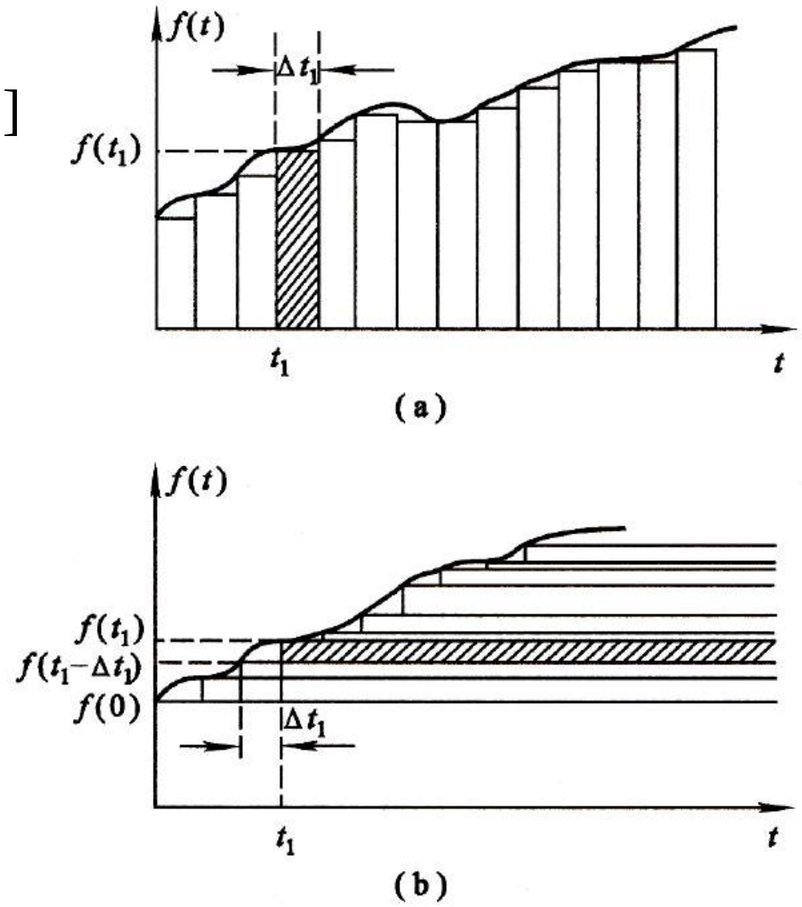
$$f(t)=\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1)[U(t-t_1)-U(t-t_1-\Delta t_1)]$$

$$=\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1)\frac{[U(t-t_1)-U(t-t_1-\Delta t_1)]}{\Delta t_1}\Delta t_1$$

$$\Delta t_1 \to 0$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)dt_1$$

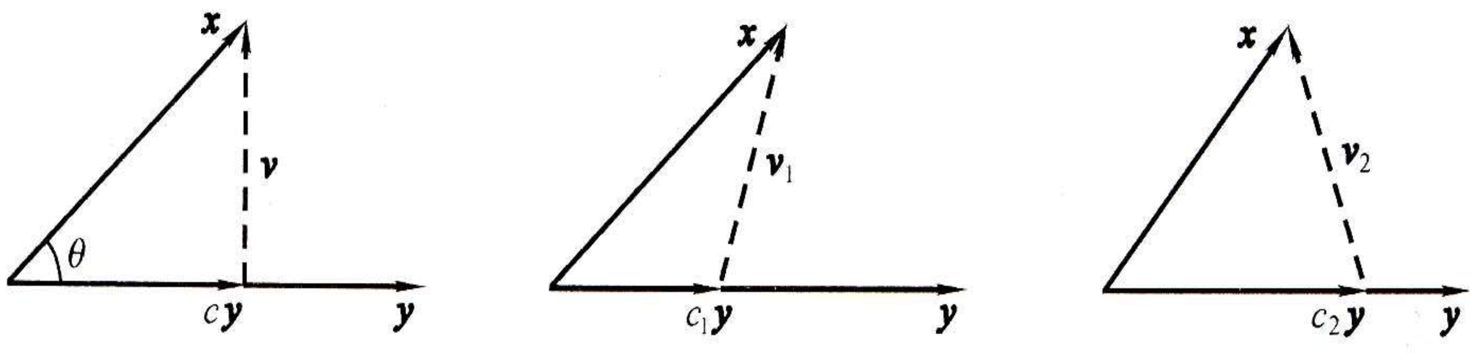
$$=f(t)*\delta(t)$$



– 分解为彼此正交的分量
  - 正余弦函数集
  - 复指数函数集
  - 勒让德多项式
– 信号的正交分解在信号与系统中占有重要地位（矢量的分解）

2、矢量的分解 (P.324-331)

两个矢量X及Y，将X分解为两个分量cy及V



(a) (b) (c)

误差矢量V=X-cy

一个矢量在另一矢量的方向上的分量
分量的数值俞大，两个矢量俞相似
误差矢量俞小
C=0，两个矢量正交
C=1，两个矢量重合

$$X \bullet Y = xy\cos\theta$$

$$x\cos\theta = cy$$

$$c = \frac{x\cos\theta}{y} = \frac{X \bullet Y}{y^2}$$

3、正交函数

$f_1(t), f_2(t)$,定义区间$[t_1, t_2]$

$$f_1(t) \approx C_{12} f_2(t)$$

$$f_e(t) = f_1(t) - C_{12} f_2(t)$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12} f_2(t)]^2 dt$$方均差

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial c_{12}} = 0$$

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} \longrightarrow$$

c_{12}为两个函数的相关系数

c_{12}越大，两个函数越相似

c_{12}=0，两个函数正交

例1：证明$f_1(t)=\sqrt{2c}e^{-ct}$和$f_2(t)=2\sqrt{c}(2e^{-ct}-3e^{-2ct})$在区间$[0,\infty]$内为正交函数，c为任意实数

例2：若$f_1(t)$与$f_2(t)$在定义域$-1.5\le t\le 1.5$有如下图所示，试用$f_2(t)$近似表示$f_1(t)$，使方均差最小

$$f_1(t)=\begin{cases}1 & |t|\le 1.5\\ 0 & |t|>1.5\end{cases},\quad f_2(t)=\begin{cases}\cos\pi t & |t|\le 0.5\\ 0 & |t|>0.5\end{cases}$$

求$c_{12}=\dfrac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^{\,2}(t)dt}$

作业

- P.38

  1-10,   1-12 (1)(3)(5)

  1-13,   1-14(2)(4)(6)

  1-18,   1-23

4、正交函数集

- 三维正交矢量

$$V = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{i}\cdot\vec{k} = 0 \\ \vec{i}\cdot\vec{i} = 1 \end{cases}$$

- n维空间

$$V = a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \cdots a_n\overrightarrow{x_n}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_i}\cdot\overrightarrow{x_j} = 0 \\ \overrightarrow{x_i}\cdot\overrightarrow{x_i} = 1 \end{cases}$$ 规范化正交坐标系

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_i}\cdot\overrightarrow{x_j} = 0 \\ \overrightarrow{x_i}\cdot\overrightarrow{x_i} = k \end{cases}$$ 非规范化正交坐标系

– 正交函数集

$g_1(t), g_2(t), \cdots g_n(t)$ 定义区间$[t_1, t_2]$

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt = 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_i(t) dt = k_i \end{cases}$$ 正交函数集

$$f(t) = \sum_{r=1}^{n} C_r g_r(t)$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)]^2 dt$$

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial c_r} = 0, \quad c_r = \frac{1}{k_r} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)]^2 dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} [\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt + \sum_{r=1}^{n} c_r{}^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r{}^2(t) dt - 2 \sum_{r=1}^{n} c_r \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt]$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} [\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{r=1}^{n} c_r{}^2 k_r]$$

n增加,$\overline{\varepsilon^2}$减小，$n \to \infty, \overline{\varepsilon^2} \to 0$

对于规范化正交坐标系

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^{n} c_r^{\ 2}\right]$$

如$f_1(t)$和$f_2(t)$为复变函数，则正交条件为：

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2{}^*(t)dt = 0 \quad 或\int_{t_1}^{t_2} f_1{}^*(t) f_2(t)dt = 0$$

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2{}^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_2{}^*(t)dt}, f_1(t) \approx c_{12} f_2(t)$$

1.5 完备的正交函数集

1、完备的正交函数集

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^{n} C_r g_r(t) \qquad c_r = \frac{1}{kr}\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt$$

- 正交函数集的系数特点：
  - 只与f(t)及对应的$g_r(t)$有关
  - 与基底函数的数目无关
- 误差信号 $f_e(t) = f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^{n} c_r{}^2 k_r\right]$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\varepsilon^2} = 0 -> $ 完备的正交函数集

$$\mathrm{f(t)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

- 无限多的正交函数构成的集合并不一定是完备的，取决条件

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\varepsilon^2} = 0\,? \qquad c_r = \frac{1}{k_r}\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t)dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt = \sum_{r=1}^{\infty} c_r{}^2 k_r \qquad \text{Paseval定律}$$

2、三角函数集

- 正弦函数集（奇函数）

$$\int_0^{T_1} \sin(n\omega_1 t)\sin(m\omega_1 t)dt = \begin{cases} T_1/2 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

- 余弦函数集（偶函数）
- 完备的三角函数集

$$f(t) = a_0 + \sum_1^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$a_n = \frac{\int_0^{T_1} f(t)\cos n\omega_1 t dt}{\int_0^{T_1} \cos^2 n\omega_1 t dt} = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\cos n\omega_1 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\sin n\omega_1 t dt$$

3、复指数函数集

$\{e^{jn\omega_1 t}\}, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$在$[0, T_1]$完备的正交函数集

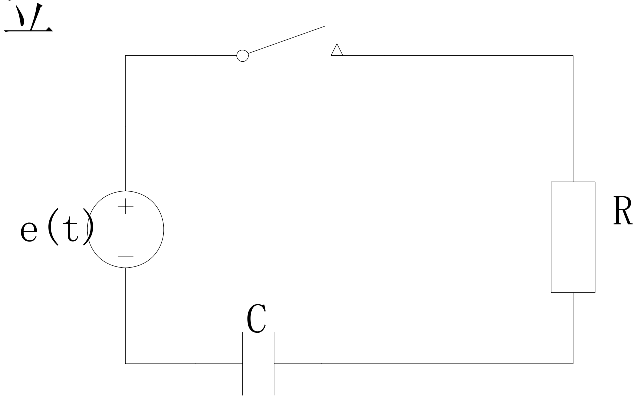
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

1.6 系统的概念及划分

1、系统概念

- 定义：若干单元部件组合成一个整体，用来处理或传输信号的装置
- 电路系统、通信系统、力学系统、扬声器系统等
- 数学模型
  - 根据物理定律和具体条件建立
  - 常系数微分方程



$$e(t) = R \cdot i + V_c$$

$$RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = e(t)$$

一阶微分方程

– 数学模型的两类描述

- 输入输出描述：输入与输出关系
- 状态变量描述：内部状态变量情况

2、系统的类型

– 线性与非线性系统

- 叠加性与均匀性
- 零输入产生零输出

可加性

比例性

- 时不变与时变系统
  - 参数固定，不随时间而变的系统（时不变）

如果：$T[x(t)] = y(t)$

则：$T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$

- 瞬时与动态系统
  - 如果对自变量的每一个值，一个系统的输出仅决定于该时刻的输入（无记忆的瞬时系统）
  - 电阻系统
- 连续时间与离散时间系统
  - 连续时间变量t、离散时间变量n
  - 微分方程、差分方程
- 集总参数与分布参数系统

1.7 线性时不变系统的性质

- 线性 $T[ax_1(t)+bx_2(t)] = ay_1(t)+by_2(t)$
- 时不变 $T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$
- 微分 $T[x'(t)] = y'(t)$
- 因果性 $y(t)=x(t)+x(t-2)$因果系统

  $y(t)=x(t)+x(t+2)$非因果系统

1.8 系统分析方法

- 研究对象
  - LTI的连续时间系统
  - LTI的离散时间系统
- 系统分析
  - 建立系统的数学模型
  - 解数学模型
    - 时域
    - 变换域
  - 系统模拟

作业

- P.369

  6-6