第六章

离散时间系统的时域分析

6.1　引言

1、发展

- 1946年ENIAC
- 1965年J. W. Cooley & J. W. Tukey 发明了FFT
- IEEE Transaction on Assp

2、离散时间系统与连续时间系统

3、讨论内容

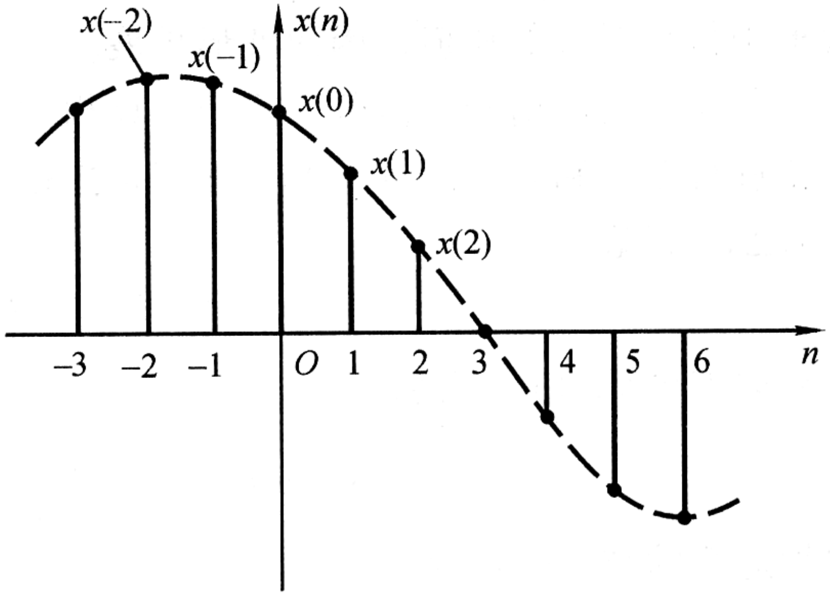
- DTS的时域分析
- ZT

	连续时间系统	离散时间系统
1	线性时不变	线性时不变
	因果系统	因果系统
2	分析方法	
	常系数微分方程	常系数差分方程
	时域方法	时域方法
	LT	ZT

6.2　离散时间信号—序列

1、序列—离散时间系统中的信号表示 x(nT), T为时间间隔，常写为x(n)

n为整数



2、常用序列

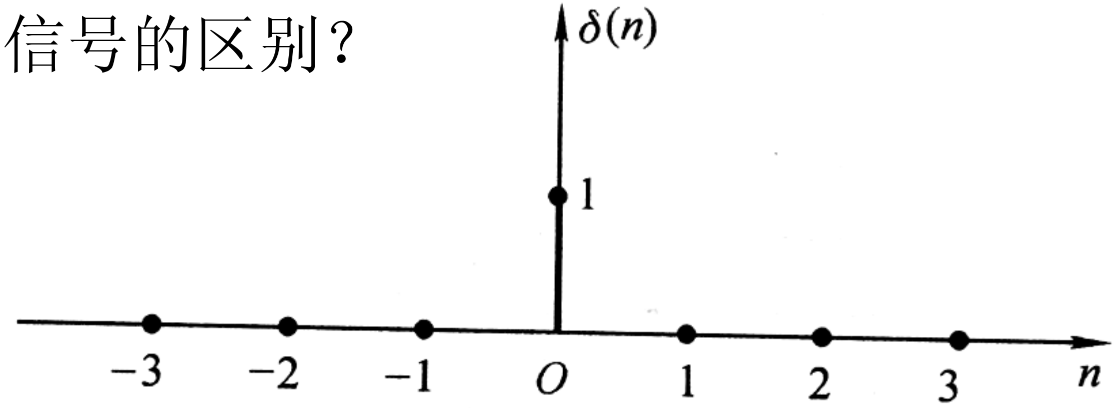
- 单位样值（取样）序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1 & n=n_0\\ 0 & n\neq n_0\end{cases}$$

延时的单位样值序列

与单位冲激信号的区别？

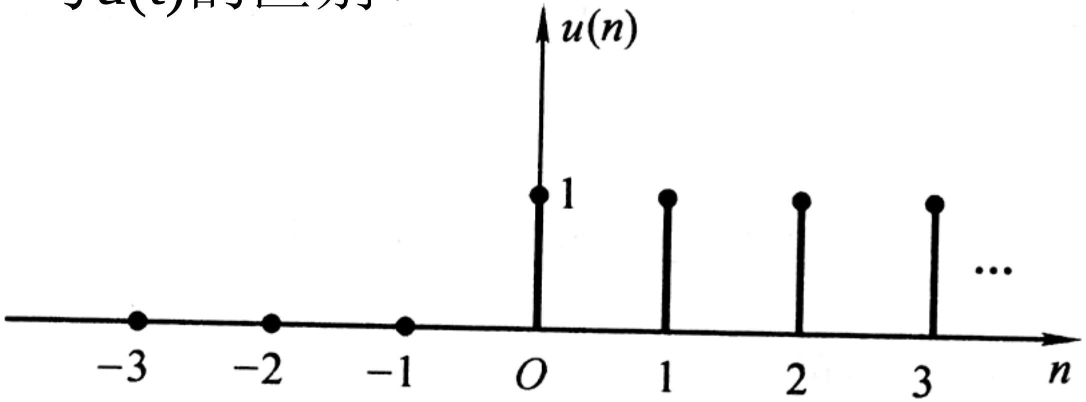


- 单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases} \qquad u(0)=1$$

$$u(n-n_0)=\begin{cases}1 & n\ge n_0\\ 0 & n<n_0\end{cases}$$

与u(t)的区别？



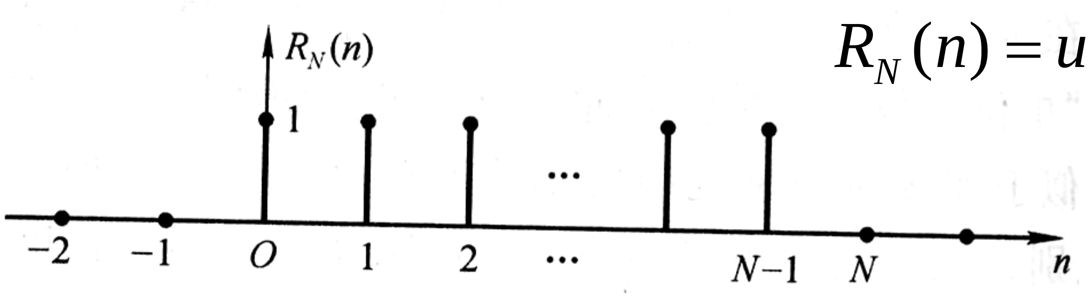
$\delta(n)$与$u(n)$关系：

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

- 矩形序列：

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & n>0, n\ge N\end{cases}$$

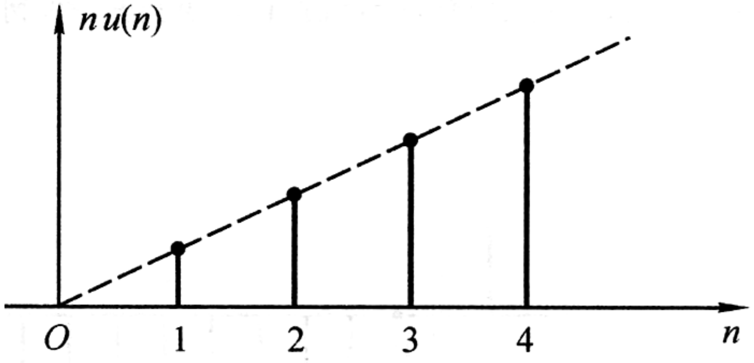


$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

- 斜变序列：

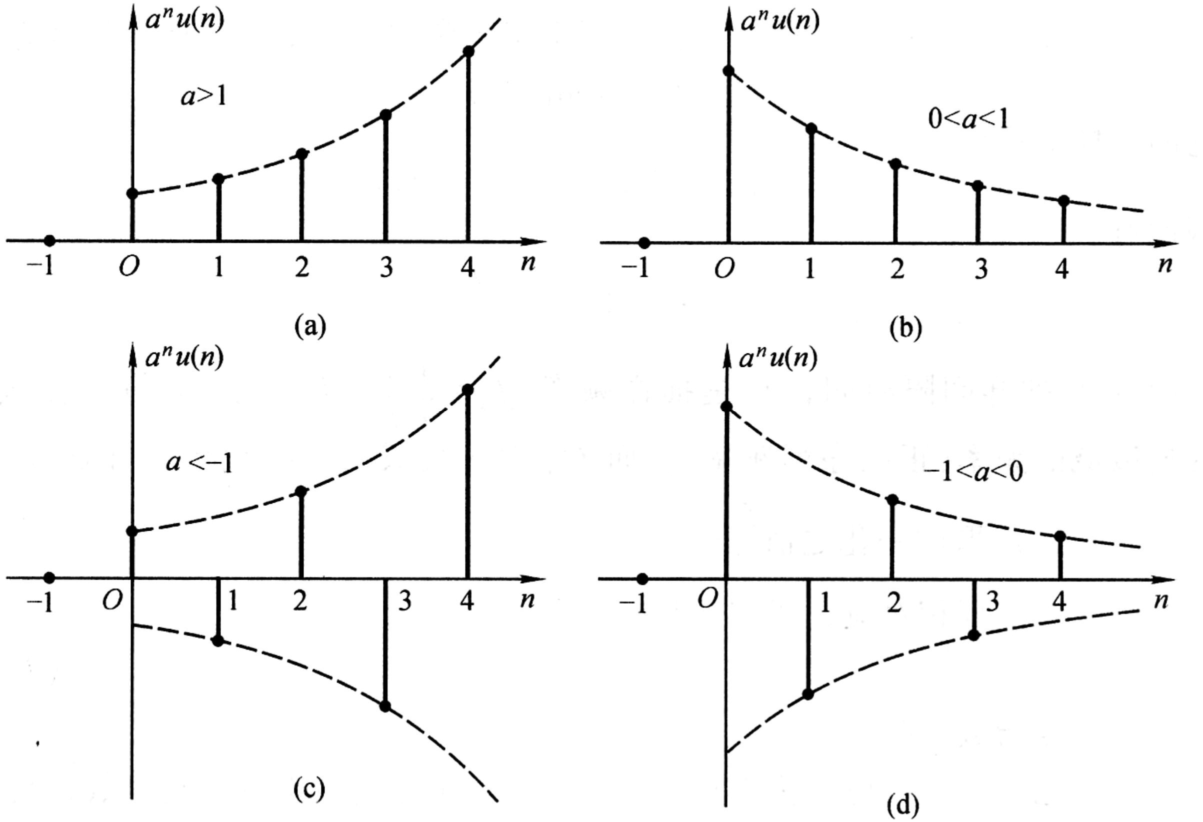
$$x(n)=nu(n)$$

类似于$x(t)=tu(t)$



– 实指数序列

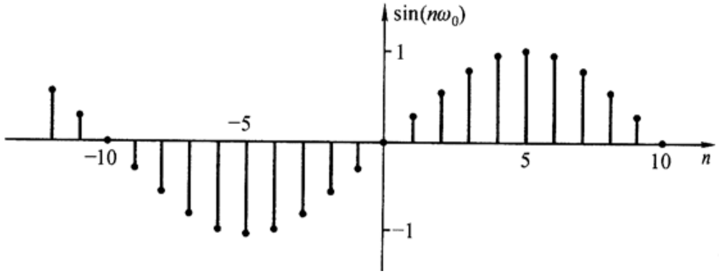
$$x(n) = a^n u(n)$$



- 正弦序列

$$x(n) = A\sin n\omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}, N\text{为序列周期}$$



$$f(t) = \sin(\Omega_0 t)$$

$$x(n) = f(nT) = \sin(n\Omega_0 T) = \sin(n\omega_0)$$

$$\omega_0 = \Omega_0 T$$

$\frac{2\pi}{\omega_0}$为整数，N＝$\frac{2\pi}{\omega_0}$

$\frac{2\pi}{\omega_0}$为有理数，N大于$\frac{2\pi}{\omega_0}$

$\frac{2\pi}{\omega_0}$非有理数，不具有周期性

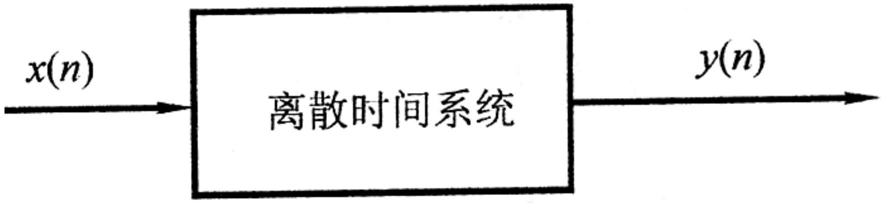
6.3　离散时间系统的数学模型
一差分方程

1、线性时不变的DTS

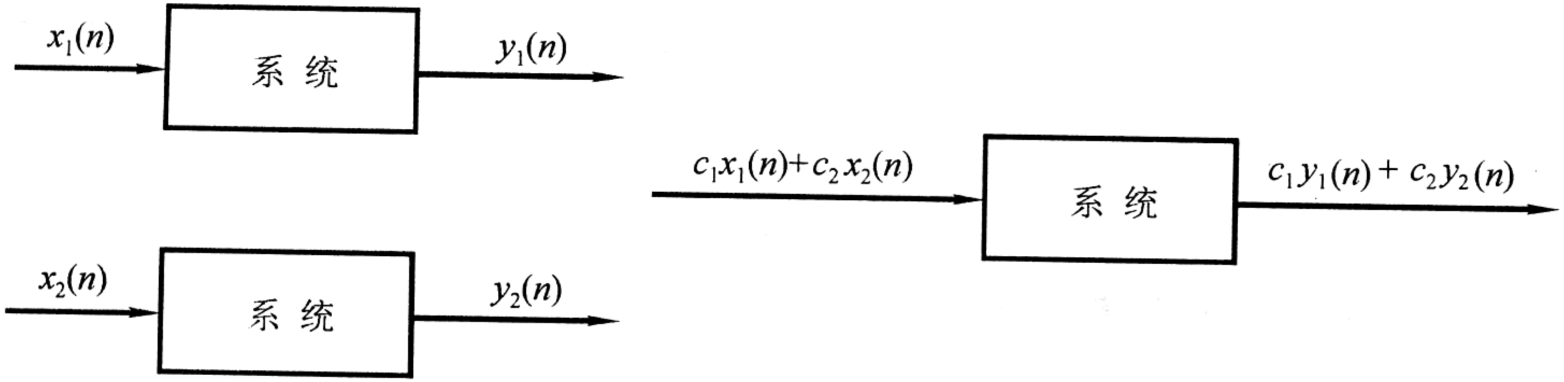
CTS	DTS	
$y(t)=T[x(t)]$	$y(n)=T[x(n)]$	
$T[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)]=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$	$T[c_1x_1(n)+c_2x_2(n)]=c_1y_1(n)+c_2y_2(n)$	线性
$T[x(t-t_0)]=y(t-t_0)$	$T[x(n-n_0)]=y(n-n_0)$	时不变
$t<0$时$h(t)=0$	$n<0$时$h(n)=0$	因果
$h(t)$绝对可积	$h(n)$绝对可和	稳定

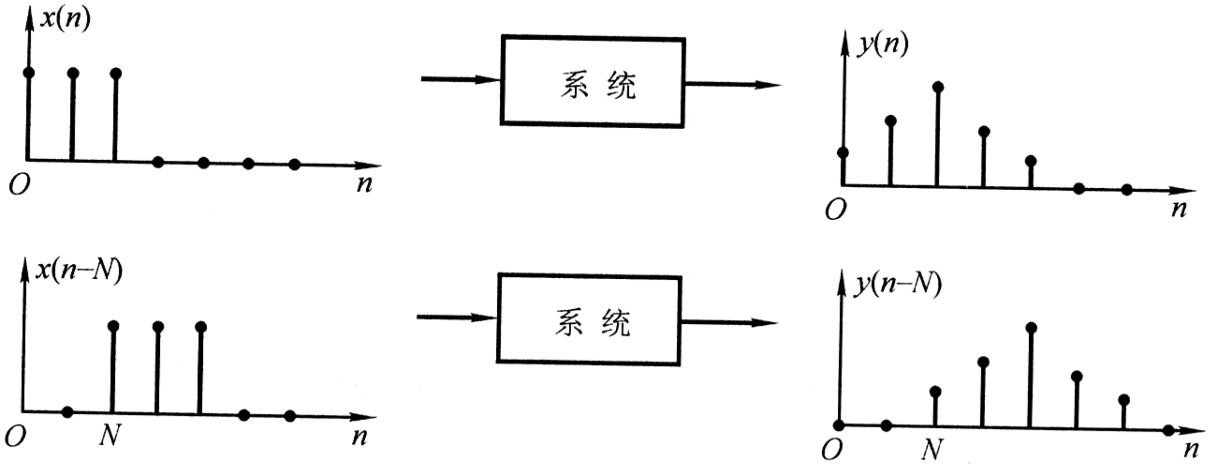
2、数学模型

- DTS

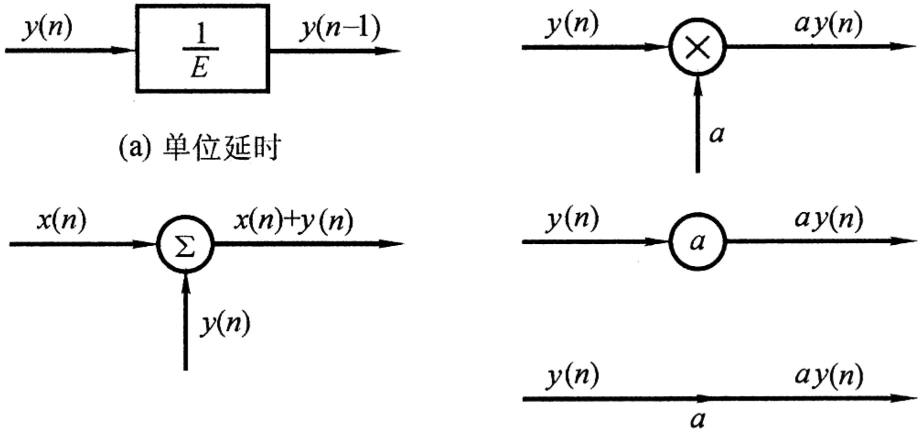


- 线性时不变DTS





- 基本运算符号

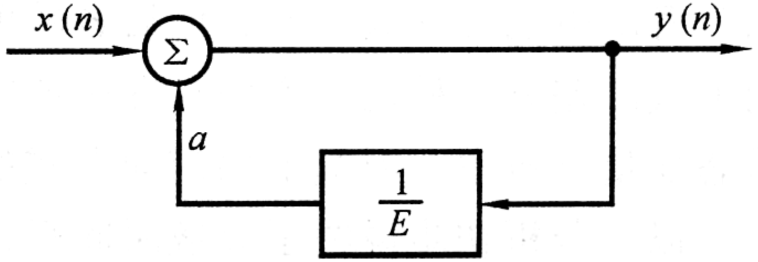


(a) 单位延时

(b) 相加

(c) 乘系数

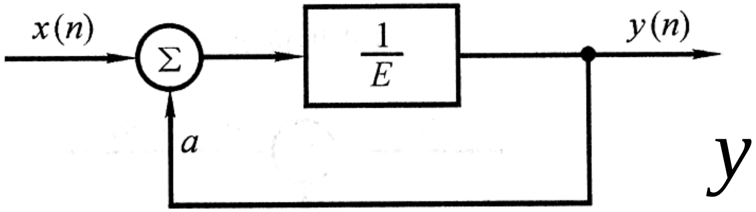
– 常系数差分方程



结构方框图

$$y(n)-ay(n-1)=x(n)$$

- 后差
- 前差　y(n),y(n+1),y(n+2),…



$$y(n+1)=ay(n)+x(n)$$

3、迭代法求解差分方程

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

$$y(0) = ay(-1) + x(0)$$

$$y(1) = ay(0) + x(1)$$

$$y(2) = ay(1) + x(2)$$

如果$x(n) = \delta(n), y(-1) = 0$

则

$$y(0) = ay(-1) + 1 = 1$$

$$y(1) = ay(0) + 0 = a$$

$$y(2) = a^2$$

$$y(n) = ay(n-1) = a^n$$

$$\therefore y(n) = a^n u(n)$$

4、差分方程的建立

- 信号结构方框图
- 微分方程导出差分方程
- 直接求

$$\frac{dy}{dt}=Ay(t)+x(t)$$

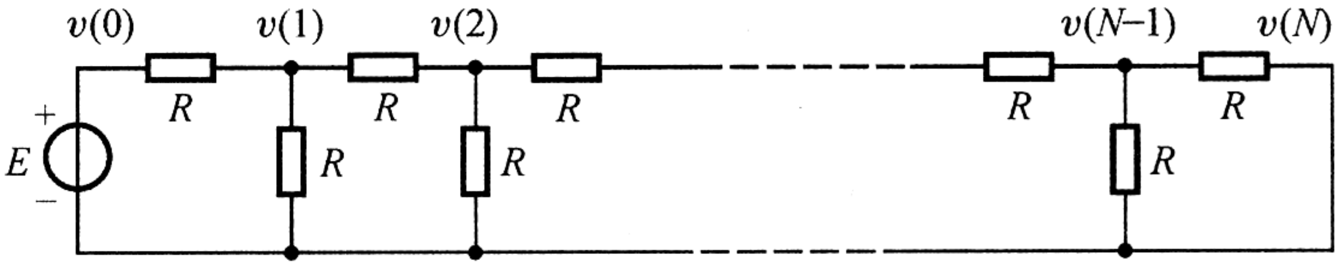
$$\frac{dy}{dt}=\frac{y(t)-y(t-T)}{T}$$,(后差）

又有$t=nT,T$足够小时，令$y(n)=y(nT)$

$$\frac{y(n)-y(n-1)}{T}＝Ay(n)+x(n)$$

$$\therefore y(n)-\frac{1}{1-AT}y(n-1)=\frac{T}{1-AT}x(n)$$

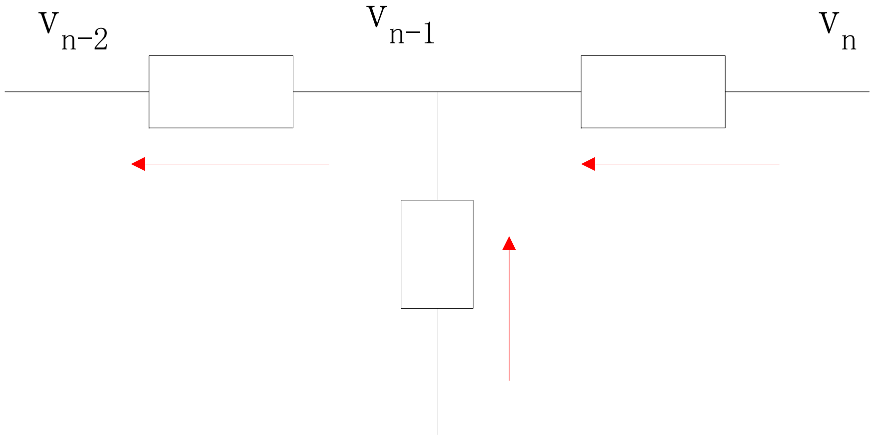
例：如图电阻T形网络



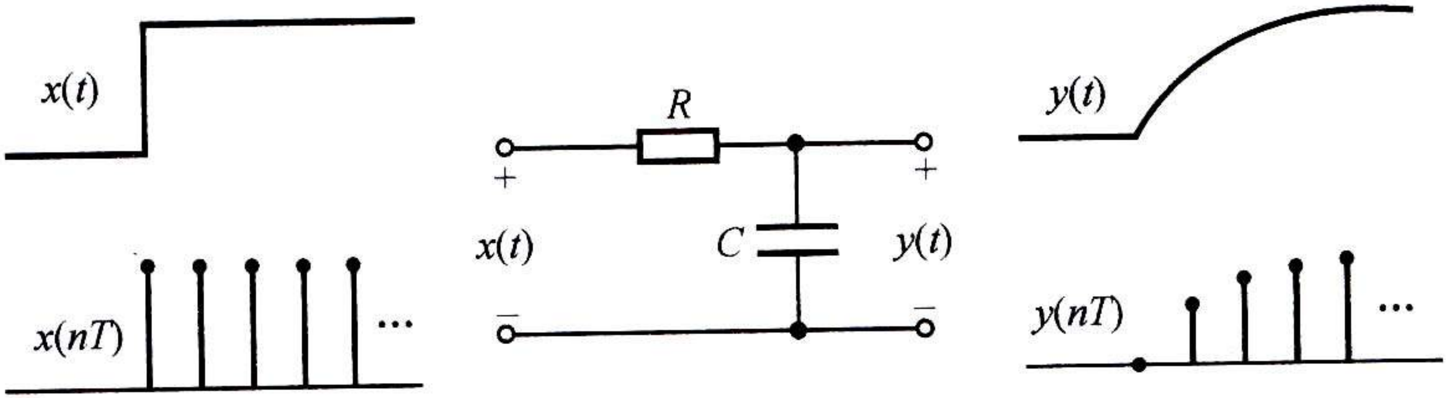
在$v(n-1)$点，利用KCL：

$$\frac{v(n-2)-v(n-1)}{R}-\frac{v(n-1)}{R}-\frac{v(n-1)-v(n)}{R}=0$$

$$\therefore v(n)-3v(n-1)+v(n-2)=0$$



例：RC低通滤波器



$$Rc\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

$$RC\frac{y(n+1)-y(n)}{T}+y(n)=x(n)$$

$$y(n+1)-(1-\frac{T}{RC})y(n)=\frac{T}{RC}x(n)$$

6.4　常系数差分方程的求解

1、求解方法

N阶差分方程的典型表达式

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

- 迭代法
- 经典法：齐次解＋特解、零输入＋零状态
- ZT求解

2、求差分方程的通解－齐次解

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

令$y(n) = C\alpha^{n}$,代入上述方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha^{n-k} = 0$$

$a_0\alpha^{N} + a_1\alpha^{N-1} + ... + a_N = 0$　　　特征方程

N个特征根：$\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_N$

$\therefore y_g(n) = c_1\alpha_1{}^{n} + c_2\alpha_2{}^{n} + ... + c_N\alpha_N{}^{n}$(无重根）

若α_1为K重根

$$y_g(n) = (c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + ... + c_k)\alpha_1{}^{n} + c_{k+1}\alpha_{k+1}{}^{n} + ... + c_N\alpha_N{}^{n}$$

例：求解$6y(n)-5y(n-1)+y(n-2)=x(n)$的齐次解

$$6\alpha^2-5\alpha+1=0$$

$$\alpha_1=1/2,\alpha_2=1/3$$

$$\therefore y_g(n)=c_1(\frac{1}{2})^n+c_2(\frac{1}{3})^n$$

例：求解齐次差分方程

$$y(n)-0.7y(n-1)+0.1y(n-2)=0$$

$$\alpha^2-0.7\alpha+0.1=0$$

$$\alpha_1=0.5,\alpha_2=0.2$$

$$y_g(n)=c_1(0.5)^n+c_2(0.2)^n$$

例：求解差分方程

$$y(n)-2y(n-1)+2y(n-2)-2y(n-3)+y(n-4)=0$$

$$y(1)=1,y(2)=0,y(3)=1,y(5)=1$$

$$\alpha^4-2\alpha^3+2\alpha^2-2\alpha+1=0$$

$$(\alpha-1)^2(\alpha^2+1)=0,\alpha_{1,2}=1(\text{二重根}),\alpha_{3,4}=\pm j$$

$$y(n)=(c_1n+c_2)+c_3j^n+c_4(-j)^n$$

$$=(c_1n+c_2)+(c_3+c_4)\cos\frac{n\pi}{2}+j(c_3-c_4)\sin\frac{n\pi}{2}$$

代入边界条件, $P=c_3+c_4,Q=j(c_3-c_4)$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ P\\ Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$c_1=0,c_2=1,P=1,Q=0$$

$$y(n)=1+\cos\frac{n\pi}{2}$$

3、求特解

激励x(n)	响应特解y(n)
A常数	D常数
n	D_1n+D_2
n^k	$D_0n^k+D_1n^{k-1}+\ldots+D_k$
e^{an}	$D\ e^{an}$
α^n	$D\alpha^n$
sinωn	D1sinωn+D2 cosωn

例：求解$6y(n)-5y(n-1)+y(n-2)=x(n)$

$x(n)=10$

$$6\alpha^2-5\alpha+1=0$$

$$\alpha_1=1/2, \alpha_2=1/3$$

$$\therefore y_g(n)=c_1(\frac{1}{2})^n+c_2(\frac{1}{3})^n$$

$$y_p(n)=D$$

$$6D-5D+D=10$$

$$D=5$$

$$y(n)=c_1(\frac{1}{2})^n+c_2(\frac{1}{3})^n+5$$

若已知$y(0)=15, y(1)=9$

$$\begin{cases} c_1+c_2+5=15 \\ \frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2+5=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1=4 \\ c_2=6 \end{cases}$$

例：$y(n)+2y(n-1)=x(n)-x(n-1)$

$x(n)=n^2, y(-1)=-1$

$$\alpha+2=0, \alpha=-2$$

$$y_g(n)=c(-2)^n$$

$$x(n)-x(n-1)=n^2-(n-1)^2=2n-1$$

$$y_p(n)=D_1n+D_2$$

$$D_1n+D_2+2D_1(n-1)+2D_2=2n-1$$

$$\begin{cases} D_1=2/3 \\ D_2=1/9 \end{cases}$$

$$y(n)=c(-2)^n+\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$$

$$-1=c(-2)^{-1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{9}$$

$$c=8/9$$

$$y(n)=\frac{8}{9}(-2)^n+\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$$

4、求系数

$$y(n)=c_1\alpha_1^n+c_2\alpha_2^n+...+c_N\alpha_N^n+D(n)$$

$$y(0),y(1),y(2),....y(N-1)$$

$$\begin{bmatrix} y(0)-D(0) \\ y(1)-D(1) \\ \vdots \\ y(N-1)-D(N-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{N-1} & \alpha_2^{N-1} & \cdots & \alpha_N^{N-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}$$

$$Y(k)-D(k)=VC$$

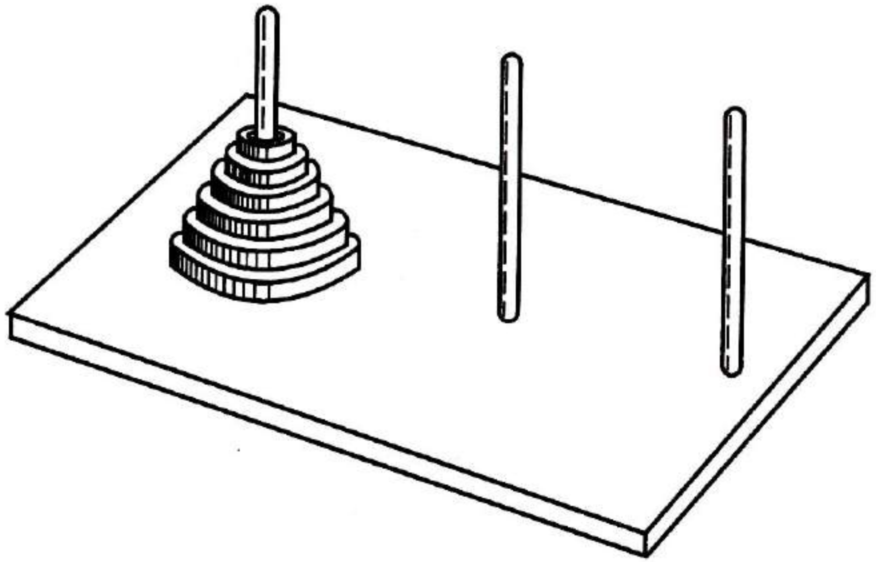
$$C=V^{-1}[Y(k)-D(k)]$$

例：讨论海诺塔（Tower of Hanoi），有n个直径不同，中心有孔的圆盘，穿在一个木桩上，如图由大到小，最大的在下面，现在要把它们近按原样搬到另一个木桩上，传递时：

（1）每次在木桩之间传递1个

（2）传递时不允许大的在小的上面

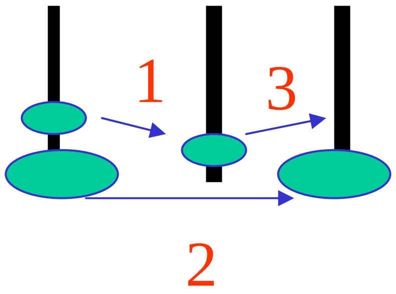
若传递n个圆盘的次数为y(n)，请列出方程，并求解



$y(0)=0$

$y(1)=1$

$y(2)=3$



$n=3, y(3)=7$

多搬1个，要将前面的$n-1$个工作做两遍再加1

$y(n)=2y(n-1)+1$

$\alpha=2$

$y_g(n)=c(2)^n$,特解为D

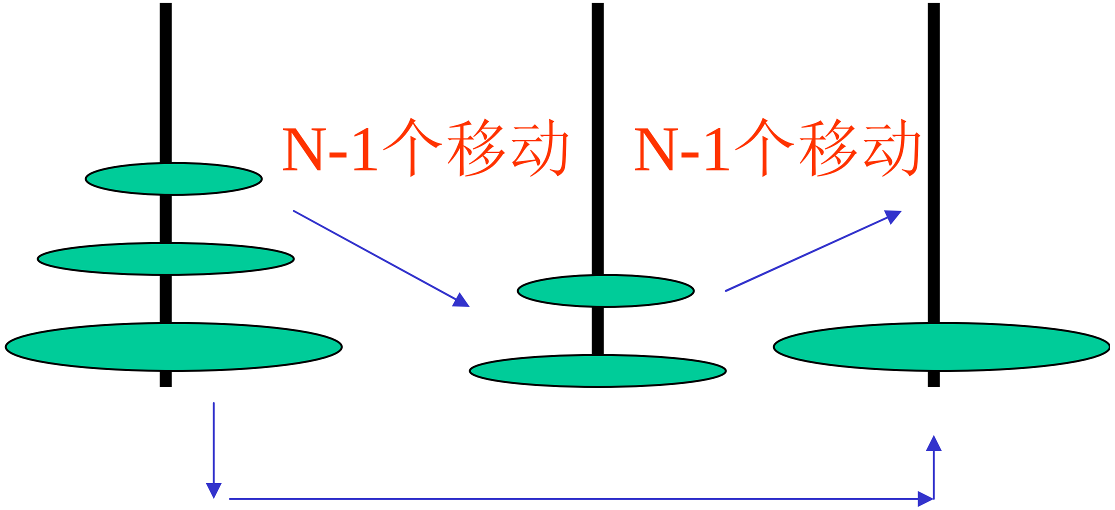
$\mathrm{D}-2\mathrm{D}=1, \mathrm{D}=-1$

$\mathrm{y(n)}=c(2)^n-1$

$\mathrm{y}(0)=0, \mathrm{c}=1$

$\mathrm{y(n)}=(2)^n-1$

$\mathrm{y}(10)=1023$



5、完全解＝零输入＋零状态

$$y(n)=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{零输入}}}{\sum_{j=1}^{N}c_{zij}\alpha_j^n}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{零状态}}}{\sum_{k=1}^{N}c_{zsk}\alpha_k^n}+D(n)$$

边界条件：$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)$

例：$y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$

已知：$y(-1)=1$,求$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$

(1)零输入响应

$\alpha-0.9=0,\alpha=0.9,y_{zi}(n)=c(0.9)^n$

$y(-1)=1$,可得$c=0.9$

$y_{zi}(n)=0.9(0.9)^n$

(2)零状态响应

$y(-1)=0$,特解为$D,y_{zs}(n)=c(0.9)^n+D$

$D-0.9D=0.05,D=0.5$

$c(0.9)^{-1}+0.5=0,c=-0.45$

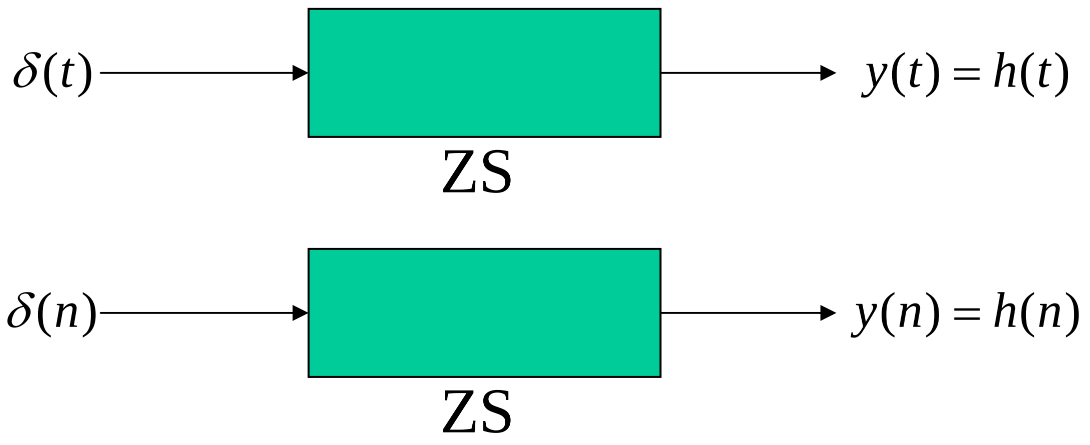
$y_{zs}(n)=-0.45(0.9)^n+0.5$

(3)完全响应

$y(n)=y_{zs}(n)+y_{zi}(n)$

6.5 单位样值响应

1、定义



$$y(n)=h(n)=T[\delta(n)]$$

$h(n-k)=T[\delta(n-k)]$ ← 时不变系统

2、h(n)表征DTS的自身性能

- 因果系统

$$h(n) = 0, (n < 0)$$

- 稳定系统

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} | h(n) | < \infty$$

3、求h(n)方法

- 由差分方程，利用迭代法

例：$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n),$求$h(n)$

$ZS:h(-1)=0$

$n=0,h(0)-\frac{1}{2}h(-1)=\delta(0)\rightarrow h(0)=1$

$n=1,h(1)-\frac{1}{2}h(0)=\delta(1)\rightarrow h(1)=\frac{1}{2}$

$n=2,h(2)-\frac{1}{2}h(1)=\delta(2)\rightarrow h(2)=(\frac{1}{2})^2$

$n,h(n)=(\frac{1}{2})^n$

- 求解差分方程，得h(n)

例：$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$,求$h(n)$

$$ZS: y(-3)=y(-2)=y(-1)=0$$

$$y(0)=h(0)=3h(-1)-3h(-2)+h(-3)+\delta(0)=1$$

$$\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1=0$$

$\alpha=1$(三重根）

$$h(n)=(c_1n^2+c_2n+c_3)$$

$$\begin{cases} 1=c_3 \\ 0=c_1-c_2+c_3 \\ 0=4c_1-2c_2+c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1/2 \\ c_2=3/2 \\ c_3=1 \end{cases}$$

$$h(n)=\frac{1}{2}(n^2+3n+2)u(n)$$

- ZT
  - CTS中H(s)→h(t)　　(LT)
  - DTS中H(z)→h(n)　　(ZT)

例：$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$,求$h(n)$

$$x(n)-->h_1(n)$$

$$-3x(n-2)-->-3h_1(n-2)$$

$$h(n)=h_1(n)-3h_1(n-2)$$

6.6 卷积

1、定义

$CTS:$

$$h(t) = T[\delta(t)]$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= h(t) * x(t)$$

$DTS:$

$$h(n) = T[\delta(n)]$$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) = x(n) * \delta(n)$$

$$y(n) = T[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

2、计算卷积的方法

- 按定义：反褶、平移、相乘、求和

例：$h(n)=a^n u(n), x(n)=u(n)-u(n-N)$

求：$y(n)=x(n)*h(n)$

(1)$n<0$，$x(m)$与$h(n-m)$无交迭

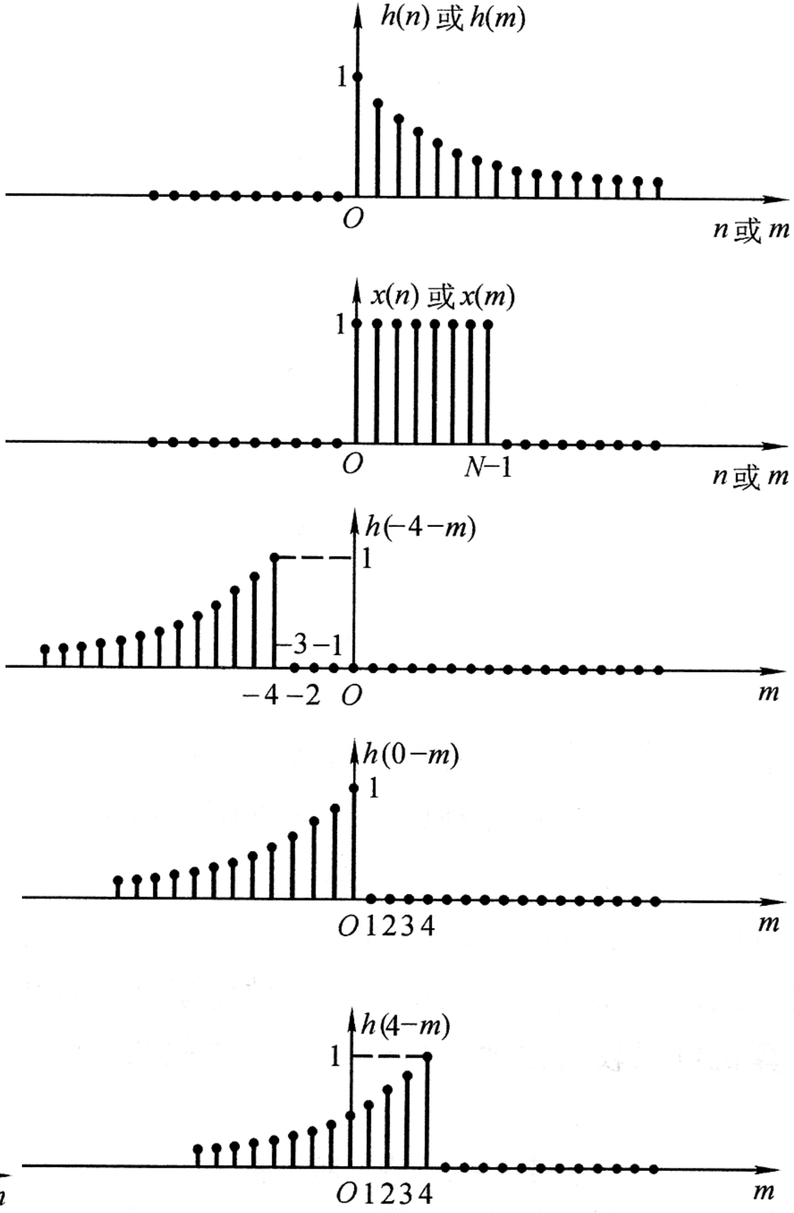
$y(n)=0$

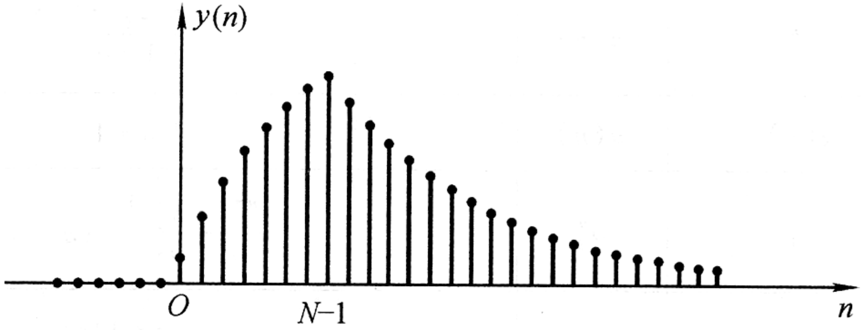
(2)$0<n<N-1, m$从0至n交迭

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}a^{n-m}=\frac{a^{n}[1-a^{-(n+1)}]}{1-a^{-1}}$$

(3)$n\ge N-1$，m从0至N－1交迭

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}a^{n-m}=\frac{a^{n}[1-a^{-N}]}{1-a^{-1}}$$





- 对位相乘求和

$$x_1(n):\{3,1,4,2\}$$

$$x_2(n):\{2,1,5\}$$

$$y(n)=x_1(n)*x_2(n)$$

		3	1	4	2
			2	1	5
		15	5	20	10
	3	1	4	2	
6	2	8	4		
6	5	24	13	22	10

作业：

7－4

7－5

7－9

7－12（1）

7－26

7－32

7－33

7－34