现代光学研讨之

菲涅尔衍射的计算机模拟

张楚珩　曾培

PHY,NJU

理想信号到实际信号——采样过程

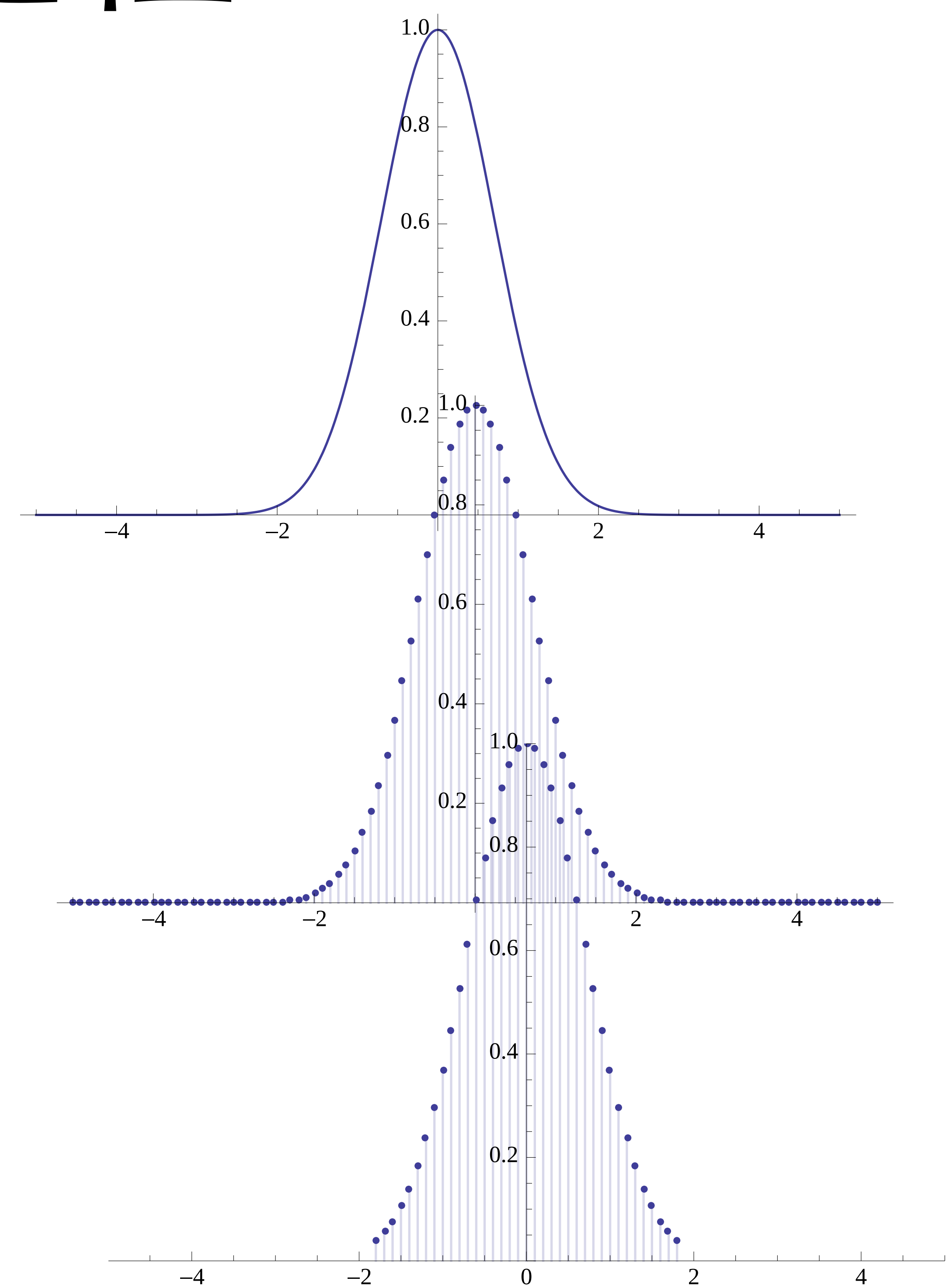
$$f(x)$$

连续 → 离散

$$f(x)\cdot comb(\frac{x}{\Delta x})$$

无限 → 有限

$$f(x)\cdot comb(\frac{x}{\Delta x})\cdot rect(\frac{x}{N\cdot\Delta x})$$



实际信号的频谱
—离散Fourier变换

- 连续Fourier变换

$$F(k)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-ikx)\,dx$$

- 离散Fourier变换

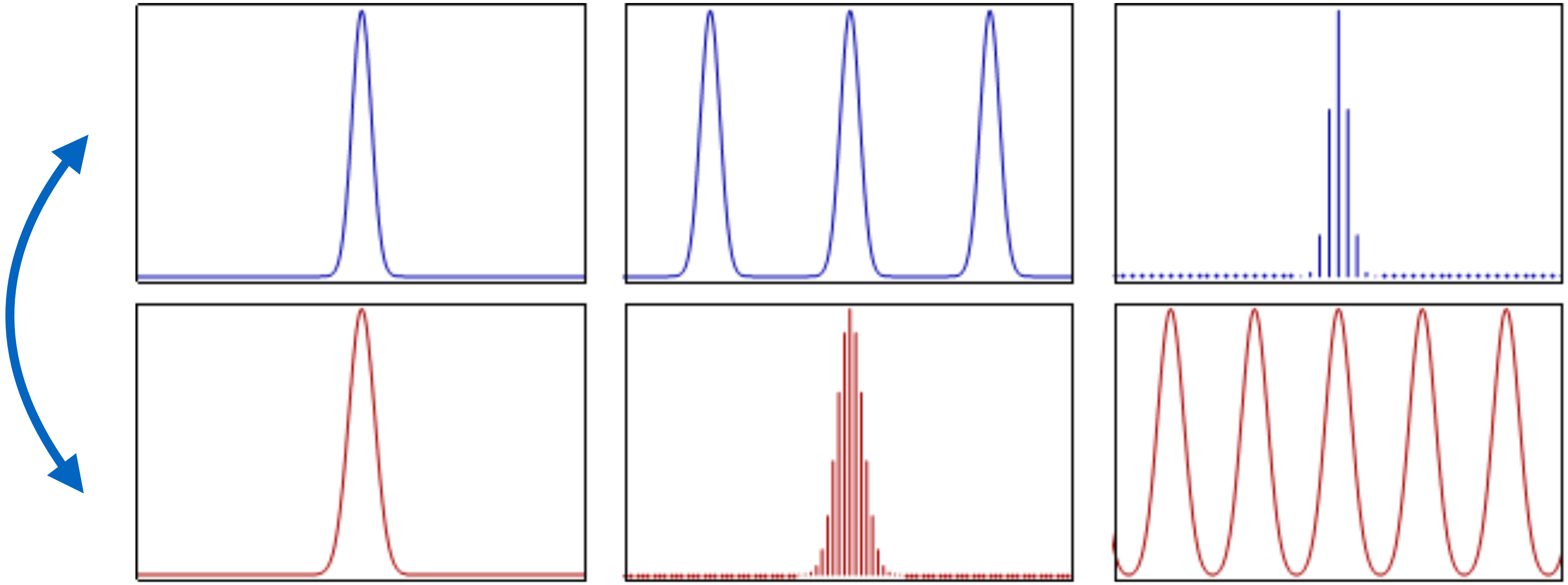
$$F(k_m)=\sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\exp\left(-i2\pi \underbrace{\frac{m}{N\,dx}}_{k}\,\underbrace{n\,dx}_{x}\right)$$

离散Fourier变换
理解之一：过程

x	Array index	Before shift on array f	After shift on array f	Output index	
-2dx	1	$f_1 \rightarrow \exp(i2\pi m/N * 0)$	$f_3 \rightarrow \exp(i2\pi m/N * 0)$	1	0/Ndx
-dx	2	$f_2 \rightarrow \exp(i2\pi m/N * 1)$	$f_4 \rightarrow \exp(i2\pi m/N * 1)$	2	1/Ndx
0	3	$f_3 \rightarrow \exp(i2\pi m/N * 2)$	$f_5 \rightarrow \exp(i2\pi m/N * 2)$	3	2/Ndx
dx	4	$f_4 \rightarrow \exp(i2\pi m/N * 3)$	$f_1 \rightarrow \exp(i2\pi m/N * 3)$	4	3/Ndx
2dx	5	$f_5 \rightarrow \exp(i2\pi m/N * 4)$	$f_2 \rightarrow \exp(i2\pi m/N * 4)$	5	4/Ndx
		F=fft(f)	ifftshift(f)	Need fftshift(F)	

Fourier变换性质—Review

- x空间周期性 ⟺ • k空间离散
- x空间离散 ⟺ • k空间周期性

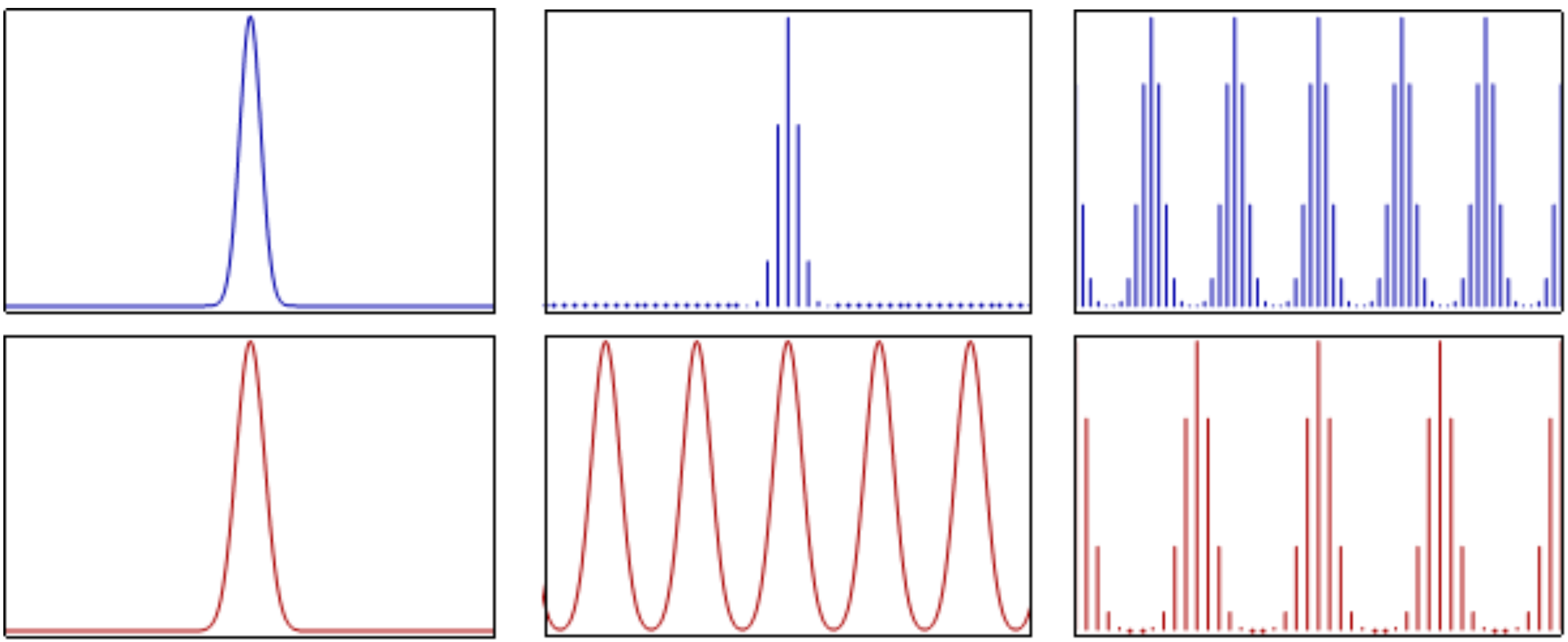


Courtesy：Wikipedia

离散Fourier变换
理解之二：离散与周期性

- “离散”的两重含义
  - x空间离散：k空间的必然周期性
  - k空间**不可避免地**离散：x空间周期性？！
- x空间有界情况下周期延拓后的得到周期k空间的Fourier转换

离散Fourier变换
理解之二：离散与周期性



离散Fourier变换
真的靠谱？-_-

- 信号是否失真?

此处黑板上应该有图

换个角度看频谱

$$f(x) \qquad\qquad F(k)$$

$$f(x)\cdot comb(\frac{x}{\Delta x}) \qquad\qquad F(k)*\mathbb{F}\{comb(\frac{x}{\Delta x})\}$$

$$f(x)\cdot comb(\frac{x}{\Delta x})\cdot rect(\frac{x}{N\cdot\Delta x}) \qquad\qquad F(k)*\mathbb{F}\{comb(\frac{x}{\Delta x})\cdot rect(\frac{x}{N\cdot\Delta x})\}$$

离散Fourier变换
理解之三：卷积

$$f(x) \qquad\qquad F(k)$$

$$f(x)\cdot comb(\frac{x}{\Delta x}) \qquad\qquad F(k)*\mathbb{F}\{comb(\frac{x}{\Delta x})\}$$

$$f(x)\cdot comb(\frac{x}{\Delta x})\cdot rect(\frac{x}{N\cdot\Delta x}) \qquad\qquad F(k)*\mathbb{F}\{comb(\frac{x}{\Delta x})\cdot rect(\frac{x}{N\cdot\Delta x})\}$$

真实信号　　　　采样失真项

离散Fourier变换是在真实频谱信号基础上

卷积上采样失真项的Fourier变换的结果

离散Fourier变换
核心问题

$$F(k) * \mathbb{F}\{comb(\frac{x}{\Delta x})\}$$

$$F(k) * \mathbb{F}\{comb(\frac{x}{\Delta x}) \cdot rect(\frac{x}{N \cdot \Delta x})\}$$

能否在一定程度上与 $F(k)$ 保持一致?

卷积—Review

- 定义:

$$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

- 重要的性质:

$$f(x)*\delta(x)=f(x)$$

$$f(x)*\delta(x-x_n)=f(x-x_n)$$

$$f(x)*\sum_m g_m(x)=\sum_m f(x)*g_m(x)$$

$$comb(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(x-m)$$

$$f(x)*comb(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x-m)$$

离散无限信号

$$F(k)*\mathbb{F}\{comb(\frac{x}{\Delta x})\} = \frac{1}{\Delta k}F(k)*comb(\frac{k}{\Delta k})$$

$$= \Delta k \cdot \frac{1}{\Delta k}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(k)*\delta(k-m\Delta k)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(k-\Delta k \cdot m) \qquad (\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x})$$

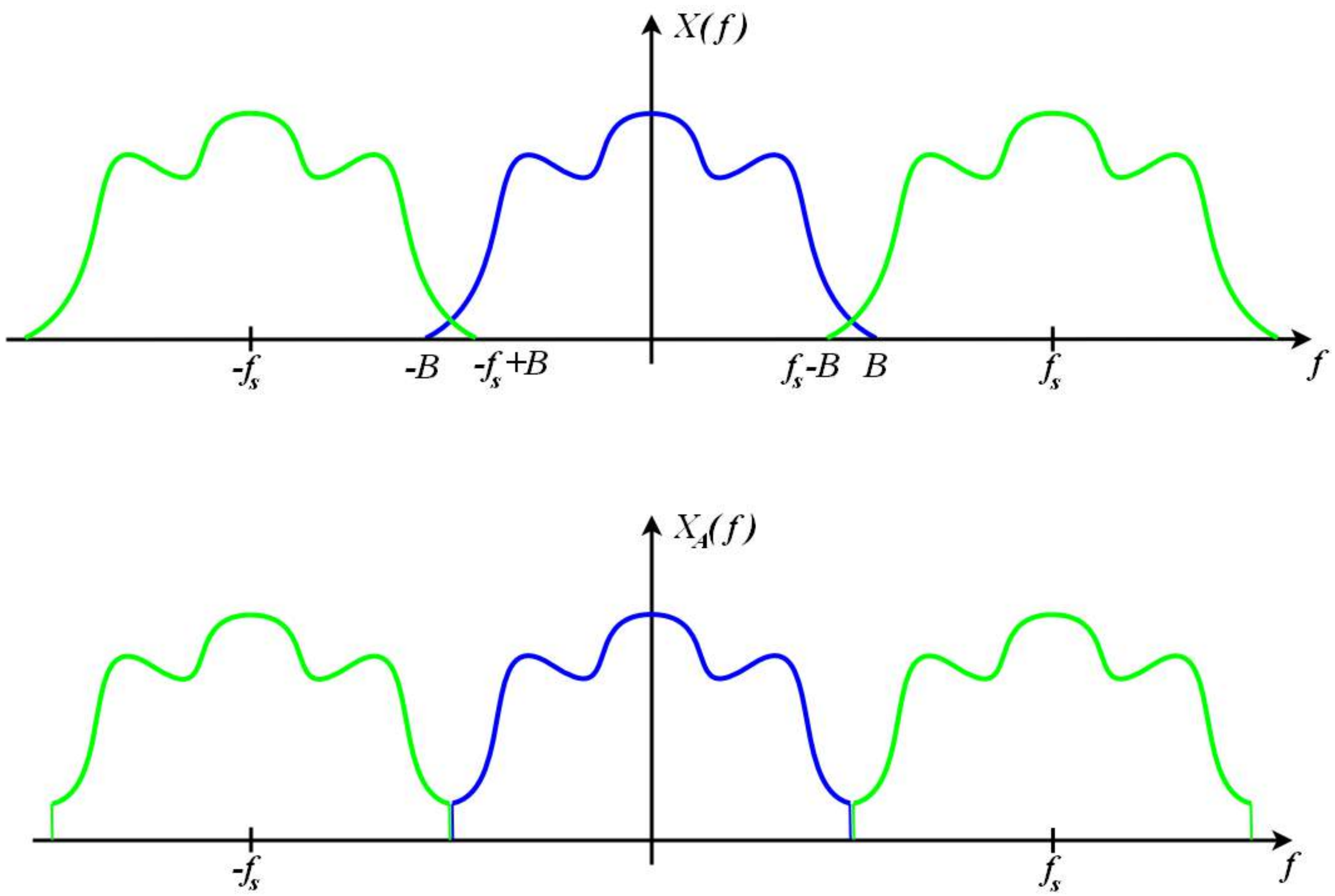
$$comb(ax) = \frac{1}{|a|}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(x-\frac{m}{a})$$

$$comb(\frac{x}{\Delta x}) \xrightarrow{\text{Fourier变换}} \frac{1}{\Delta k}comb(\frac{k}{\Delta k}) \quad (\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x})$$

$$or \quad \frac{1}{\Delta f}comb(\frac{f}{\Delta f}) \quad (\Delta f = \frac{1}{\Delta x})$$

离散无限信号
—采样定理

$$F(f)*\mathbb{F}\{comb(\frac{x}{\Delta x})\}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}F(f-\Delta f\cdot m) \qquad (\Delta f=\frac{1}{\Delta x})$$



对于有限频域的信号域宽为[-B,B]时：

$$\Delta f>2B$$

即 $\Delta x<\frac{1}{2B}$ 时

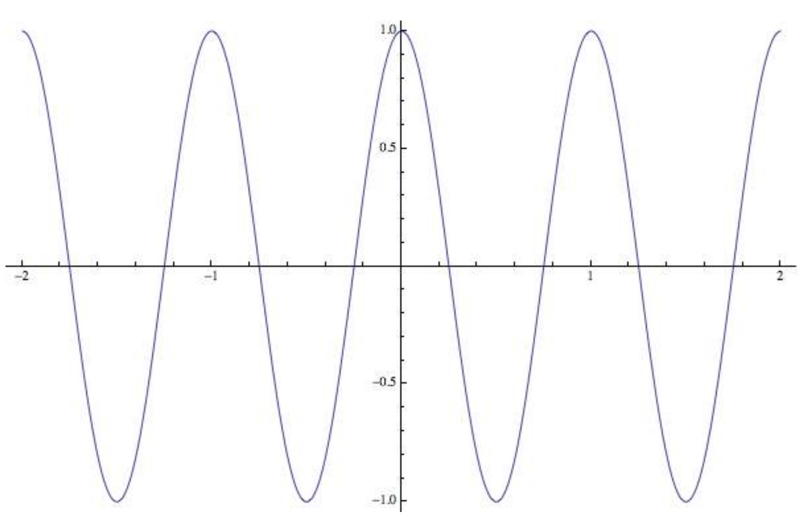
频域信号可分辨

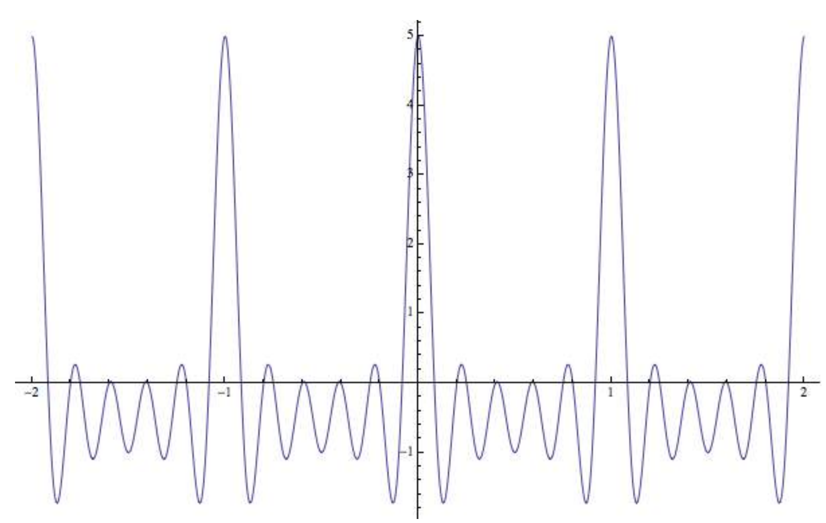
离散有限信号 —Fourier变换失真

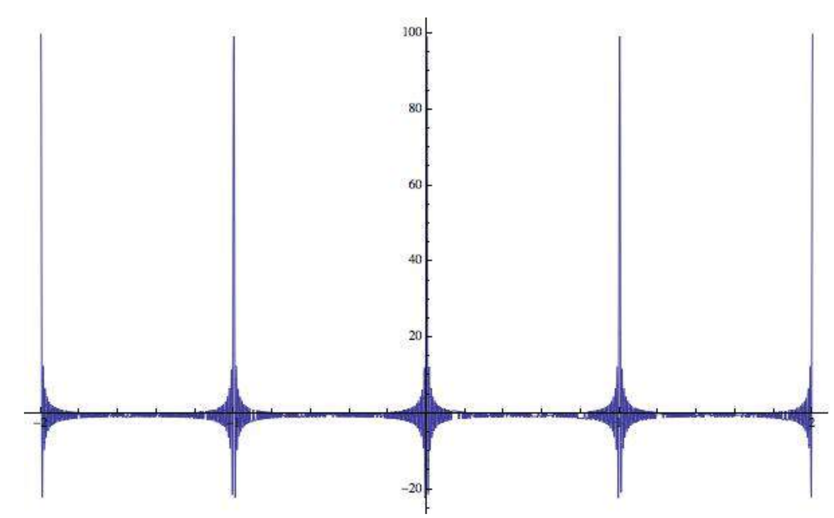
- 研究采样失真项的Fourier变换

$$\mathbb{F}\{comb(\frac{x}{\Delta x})\cdot rect(\frac{x}{N\cdot\Delta x})\}$$

- 有限个Delta函数的Fourier变换







遗留问题之一

如何衡量
离散Fourier变换
失真程度？

实域、频域
整空间、倒空间

傅里叶变换	固体物理
采样的离散	格点的离散
采样的有限	格点总数的有限
采样点的值	格点的相对位移 （以研究固体热学性质为例）
采样范围外进行周期延拓	波恩-冯卡门边界条件
$e^{iqla} = e^{i2\pi \frac{h}{N} l} \quad (l, h \in \mathbb{Z})$	$e^{i2\pi \frac{n}{N} m} \quad (n, m \in \mathbb{Z})$
不同方向的平面波叠加 （以光学上的意义为例）	格波
……	……

计算机模拟的几种思路

1 暴力积分法

$$U_0(x_0,y_0)=\iint U_1(x_1,y_1)h(x_1,y_1;x_0,y_0)\,dx_1\,dy_1$$

$$h(x_1,y_1;x_0,y_0)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\exp\{\frac{ik}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]\}$$

$$U_0(m_0x_0,n_0y_0)=\sum_{m_1,n_1}U_1(m_1\Delta x_1,n_1\Delta y_1)h(m_1\Delta x_1,n_1\Delta y_1;m_0x_0,n_0y_0)\Delta x_1\Delta y_1$$

$$h(x_1,y_1;x_0,y_0)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\exp\{\frac{ik}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]\}$$

计算机模拟的几种思路

2 传递函数抽样法

$$U_0(x_0,y_0)=IFFT\{FFT\{U_1(x_1,y_1)\}H(f_x,f_y)\}$$

$$H(f_x,f_y)=\exp[i2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-f_x{}^2-f_y{}^2}]$$

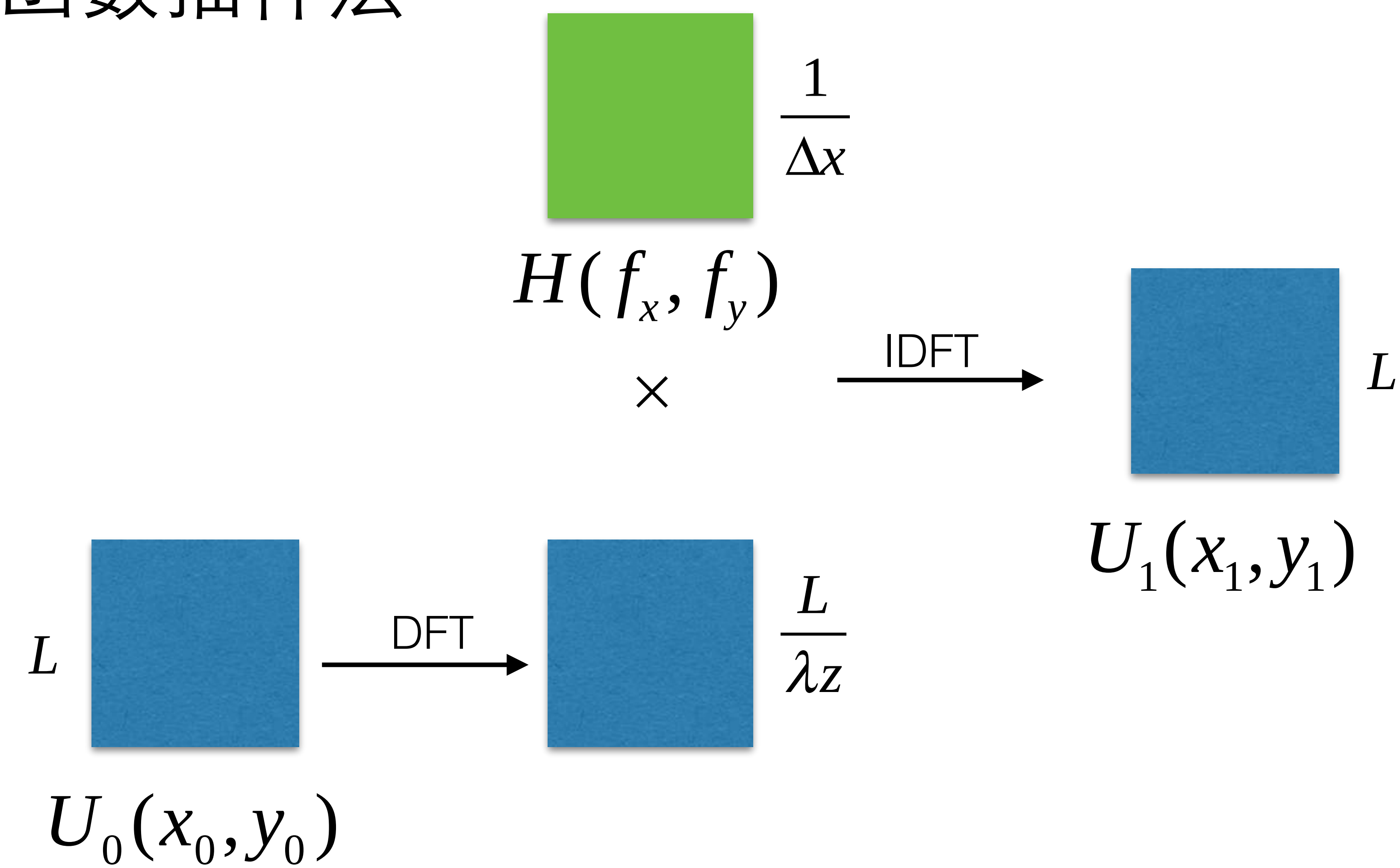
$$U_0(m_0\Delta x_0,n_0\Delta y_0)=IDFT\{DFT\{U_1(m_1\Delta x_1,n_1\Delta y_1)\}H(p\Delta f_x,q\Delta f_y)\}$$

$$H(f_x,f_y)=\exp[i2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-f_x{}^2-f_y{}^2}]$$

计算机模拟的几种思路

2 传递函数抽样法

$$f_x = \frac{x}{\lambda z}$$



$$\Delta f_x = \frac{1}{N\Delta x} \leq \frac{1}{B_x} = \frac{1}{\frac{\lambda z}{\Delta x}} \Rightarrow z \leq \frac{N\Delta x^2}{\lambda} \equiv Z_0$$

计算机模拟的几种思路

3 点扩散函数抽样法

$$U_0(x_0,y_0)=IFFT\{FFT\{U_1(x_1,y_1)\}\bullet FFT\{h(x_1,y_1)\}\}$$

$$h(x,y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\exp[\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)]$$

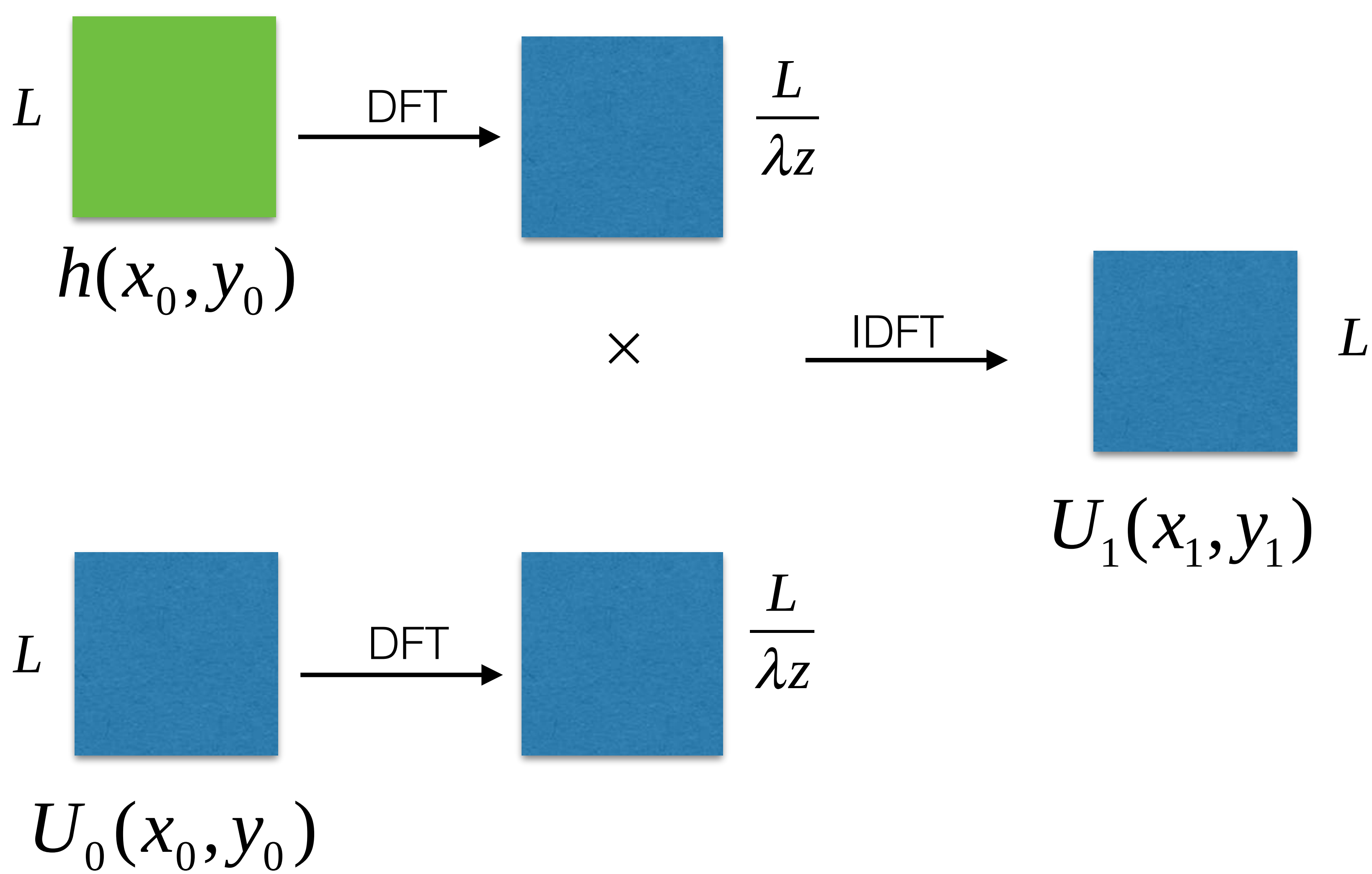
$$U_0(m_0\Delta x_0,n_0\Delta y_0)=IDFT\{DFT\{U_1(m_1\Delta x_1,n_1\Delta y_1)\}\bullet$$
$$DFT\{h(m_1\Delta x_1,n_1\Delta y_1)\}\}$$

$$h(x,y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\exp[\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)]$$

计算机模拟的几种思路

3 点扩散函数抽样法

$$f_x = \frac{x}{\lambda z}$$



$$\Delta x \le \frac{1}{B_x} = \frac{1}{\frac{L}{\lambda z}} \Rightarrow z \ge \frac{N\Delta x^2}{\lambda} \equiv Z_0$$

计算机模拟的几种思路

4 加权函数抽样法

$$U_0(x_0,y_0)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\mathrm{e}^{\frac{ik}{2z}(x_0{}^2+y_0{}^2)}FFT\{U_1(x_1,y_1)\bullet e^{\frac{ik}{2z}(x_1{}^2+y_1{}^2)}\}$$

$$U_0(p_0\Delta x_0,q_0\Delta y_0)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\mathrm{e}^{\frac{ik}{2z}((p_0\Delta x_0)^2+(q_0\Delta y_0)^2)}DFT\{U_1(m_1\Delta x_1,n_1\Delta y_1)\bullet$$

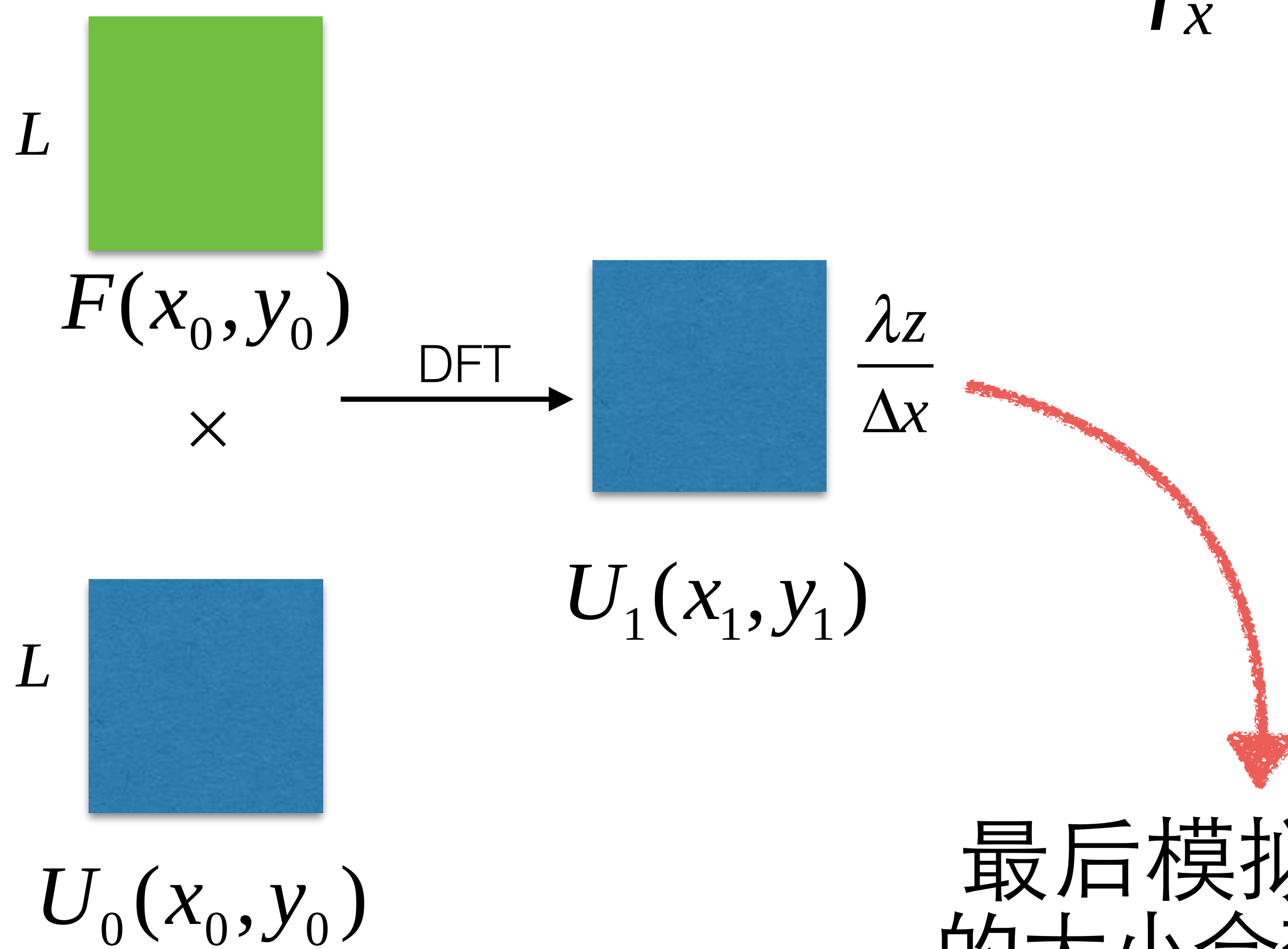
$$e^{\frac{ik}{2z}((m_1\Delta x_1)^2+(n_1\Delta y_1)^2)}\}$$

需满足 $\Delta x_0=\dfrac{\lambda z}{\Delta x_1}$

计算机模拟的几种思路

4 加权函数抽样法

$$f_x = \frac{x}{\lambda z}$$

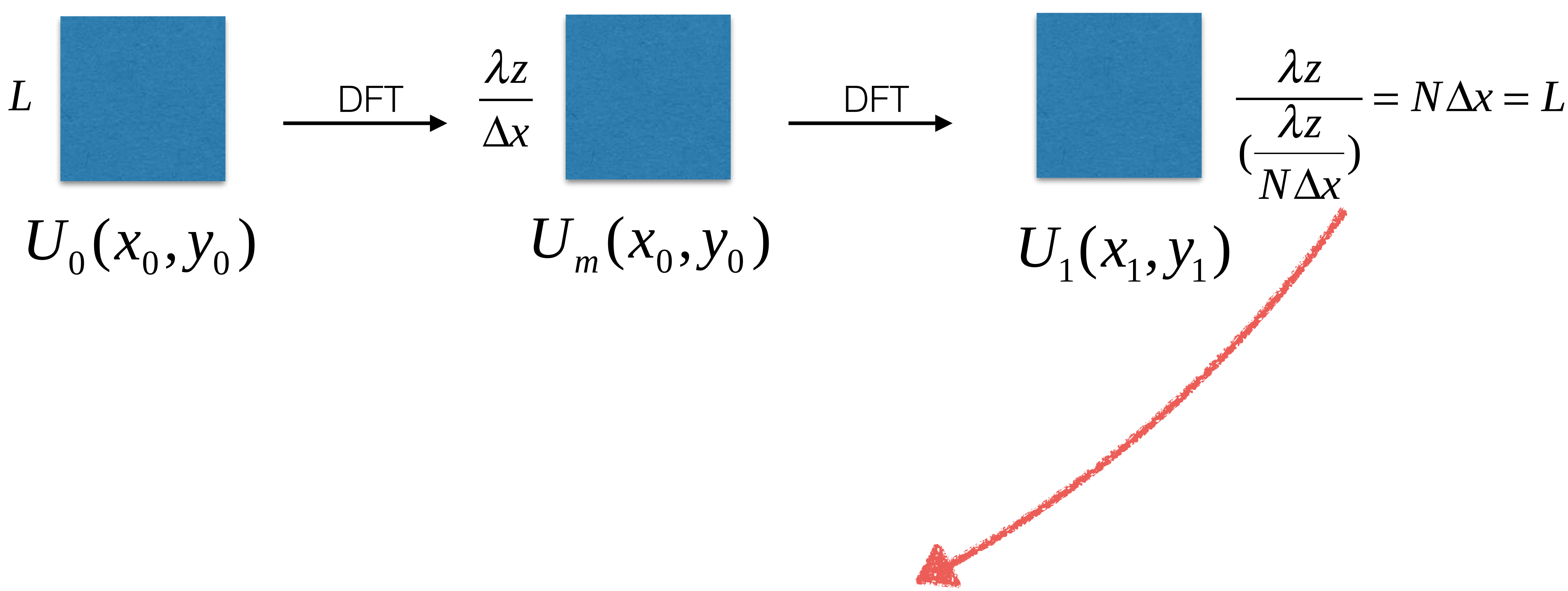


最后模拟成像的大小会变化!

$$\Delta x \le \frac{1}{B_x} = \frac{1}{\frac{L}{\lambda z}} \Rightarrow z \ge \frac{N \Delta x^2}{\lambda} \equiv Z_0$$

计算机模拟的几种思路

4 加权函数抽样法



最后模拟成像
恢复原长

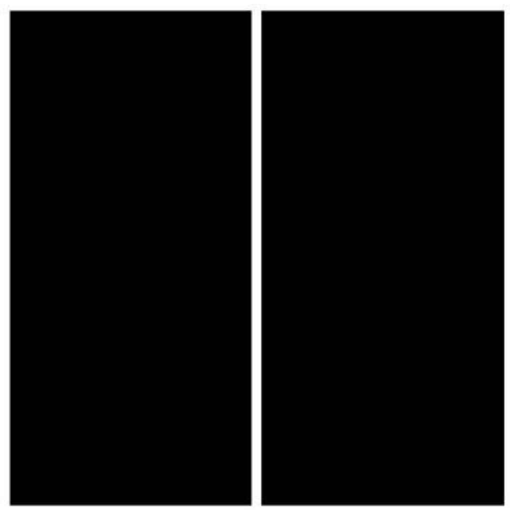
计算机模拟的几种思路

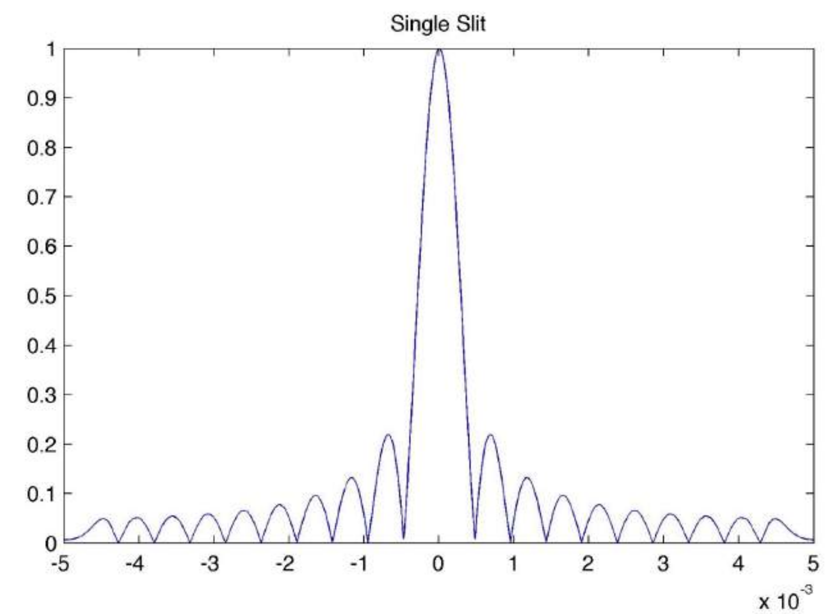
- 暴力解法耗时长 时间复杂度~$O(N^4)$
- 其他解法 时间复杂度~$O(N^2\log N)$
- 在$z<Z_0$时，使用第二种方法
- 在$z>Z_0$时，使用第三种或者第四种方法

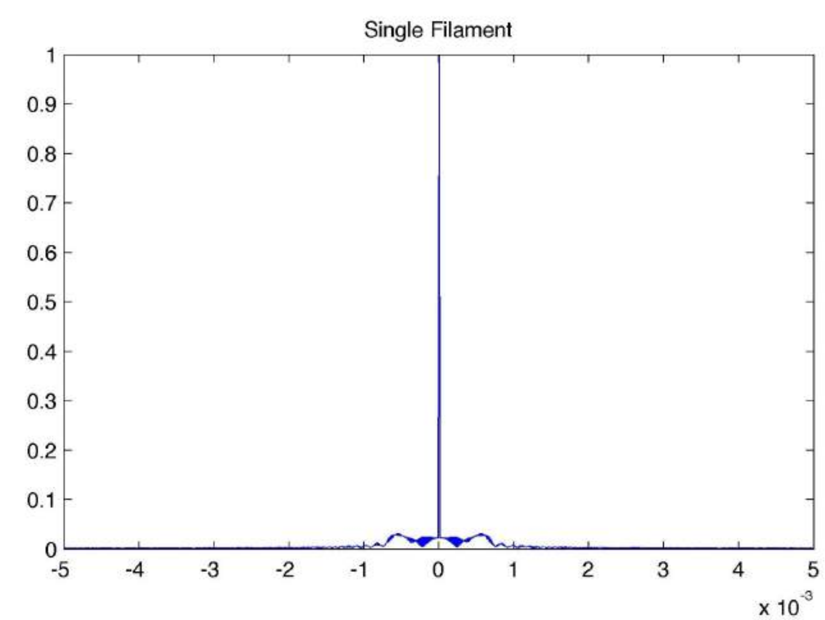
遗留问题之二

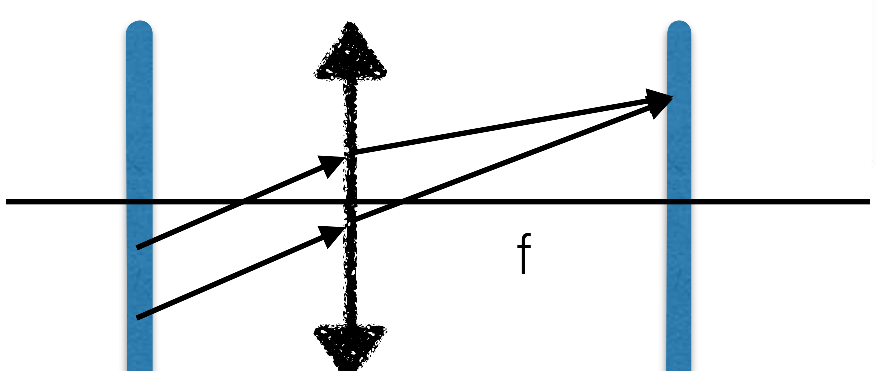
不同方法的
限制条件不同
本质？

模拟结果展示





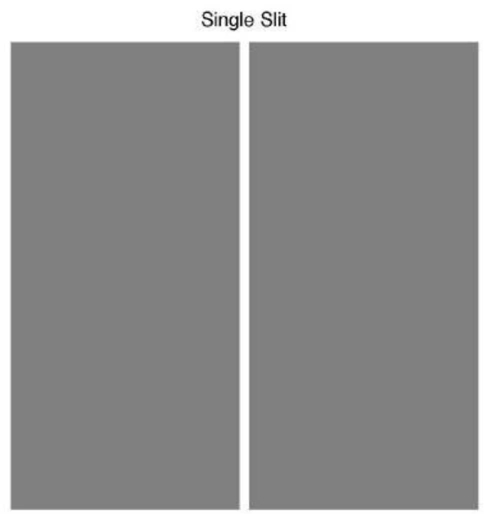


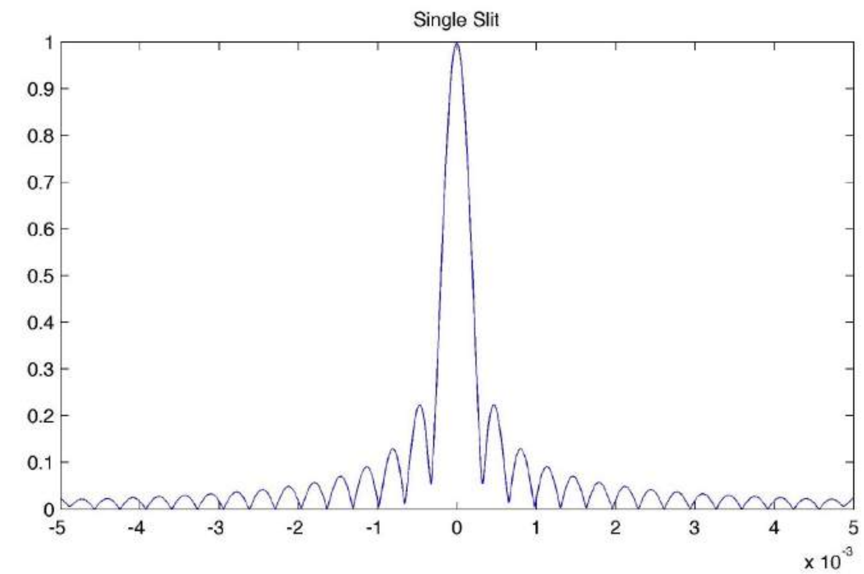


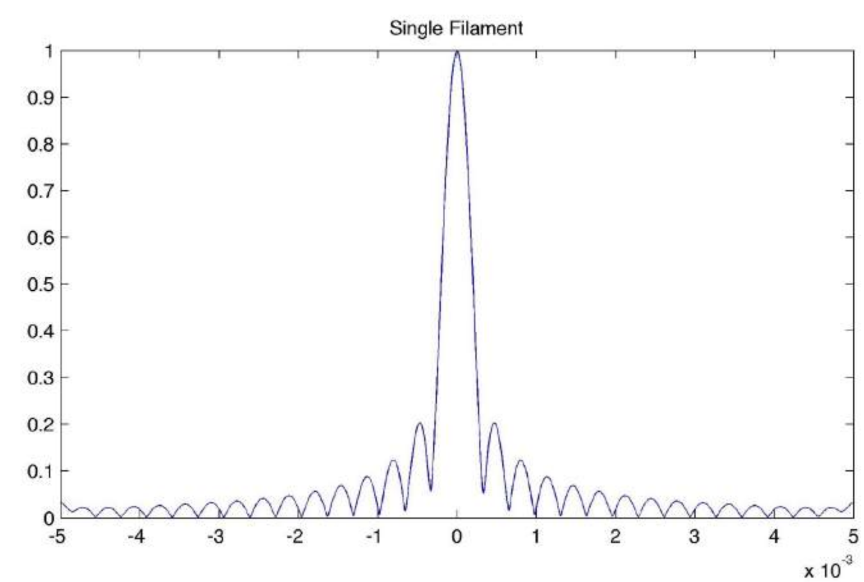
单缝和单丝

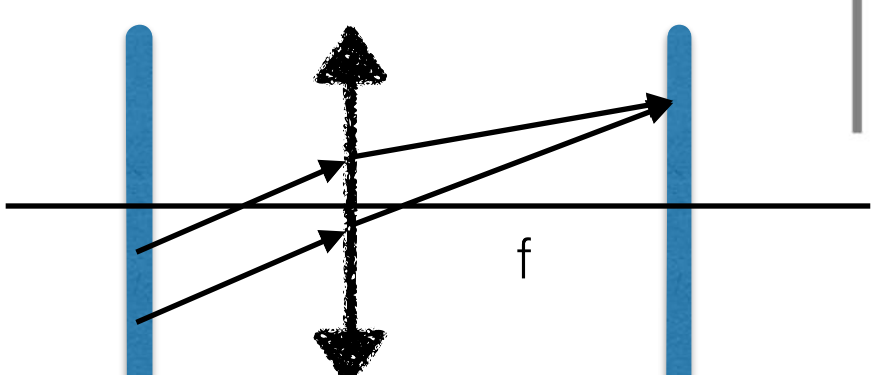
模拟结果展示

单缝和单丝『湛韬的思路』

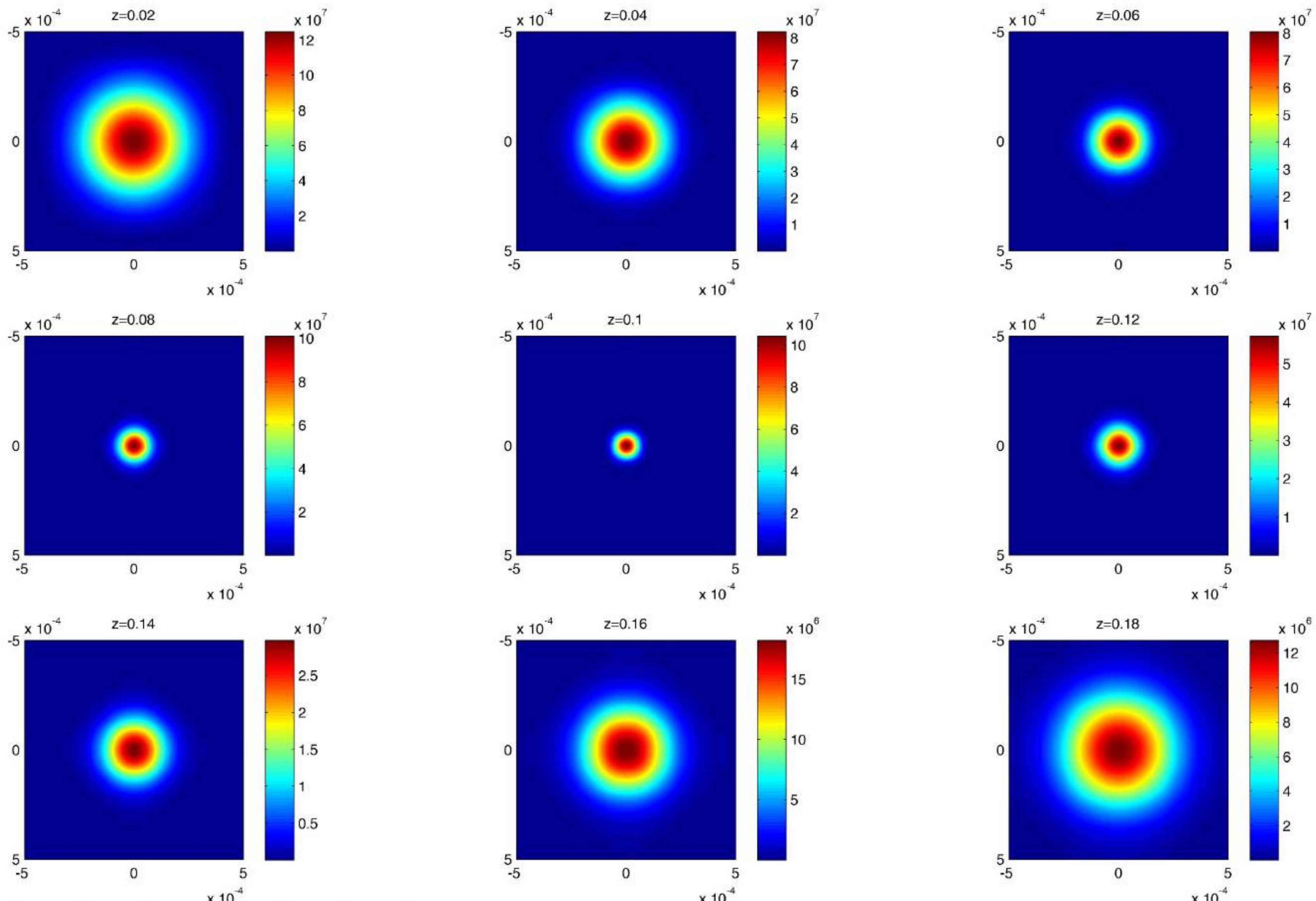


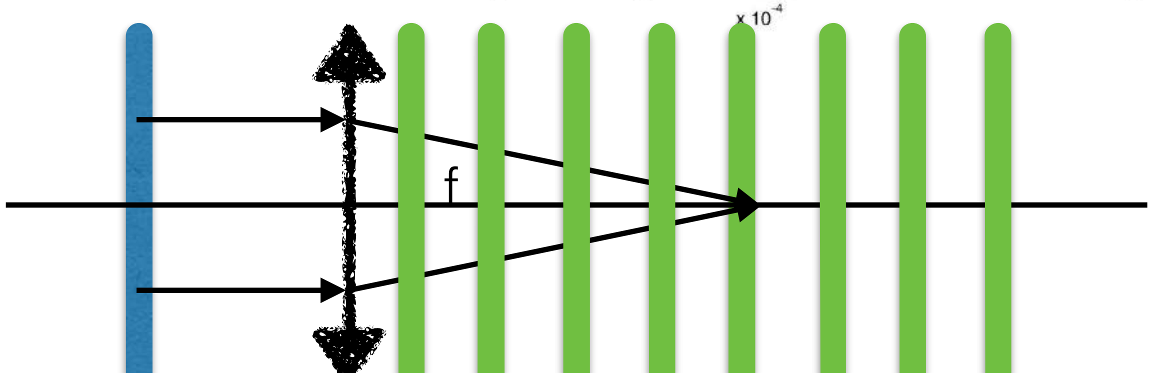






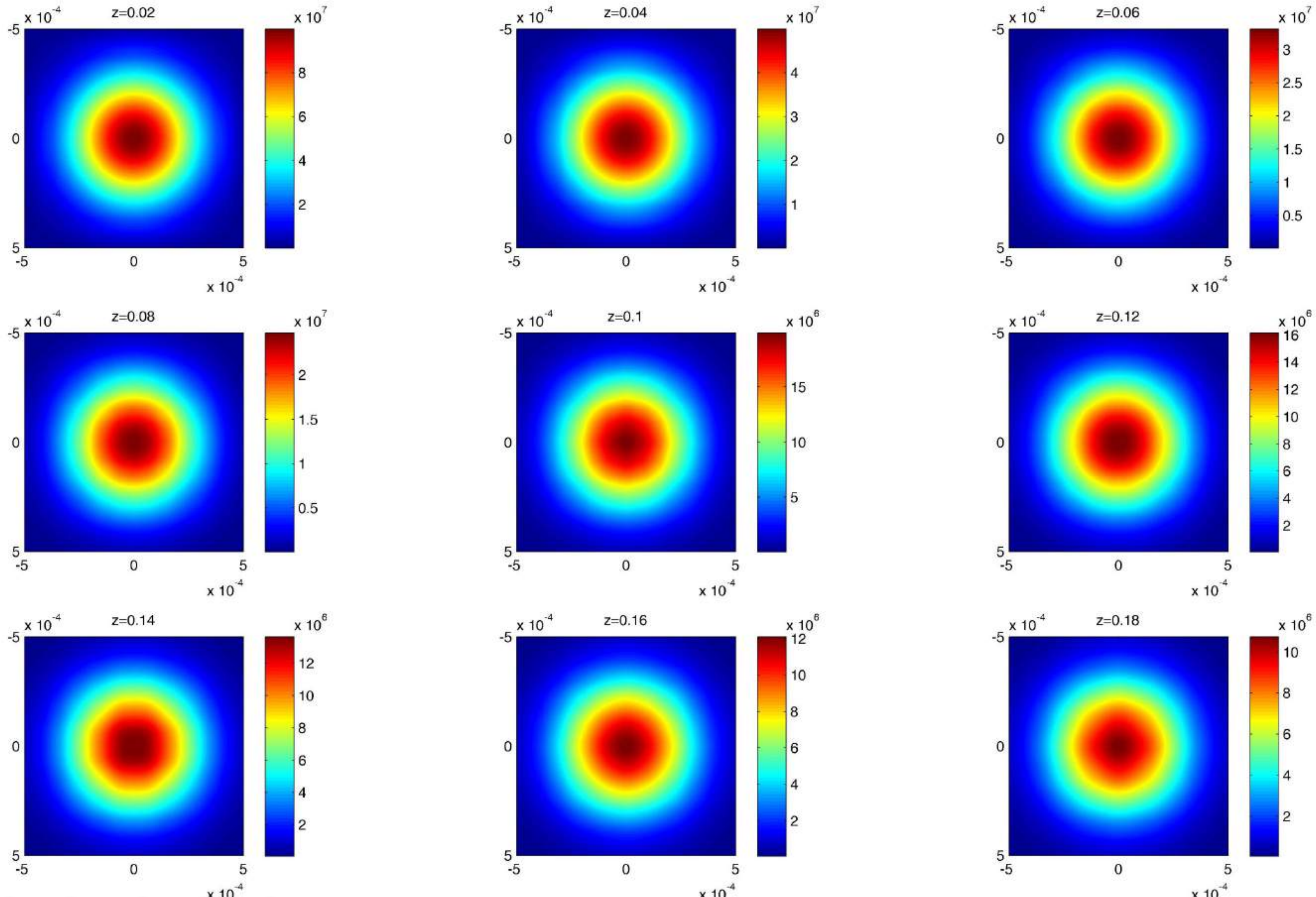
模拟结果展示



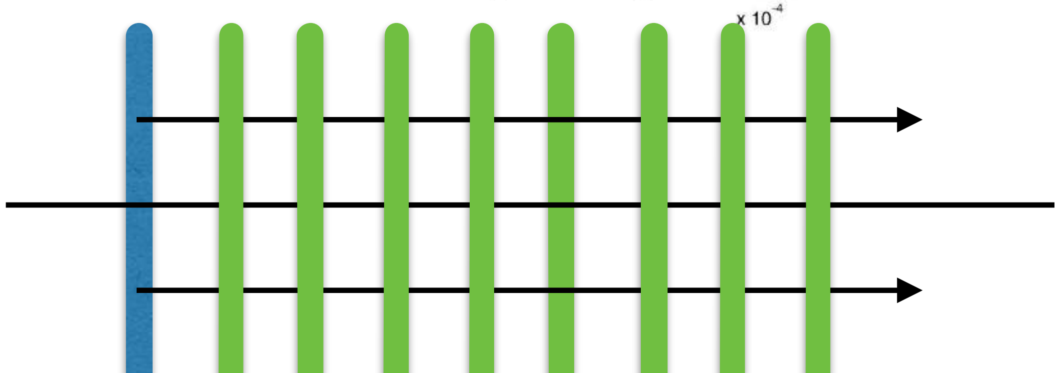


高斯光束的汇聚和发散

模拟结果展示



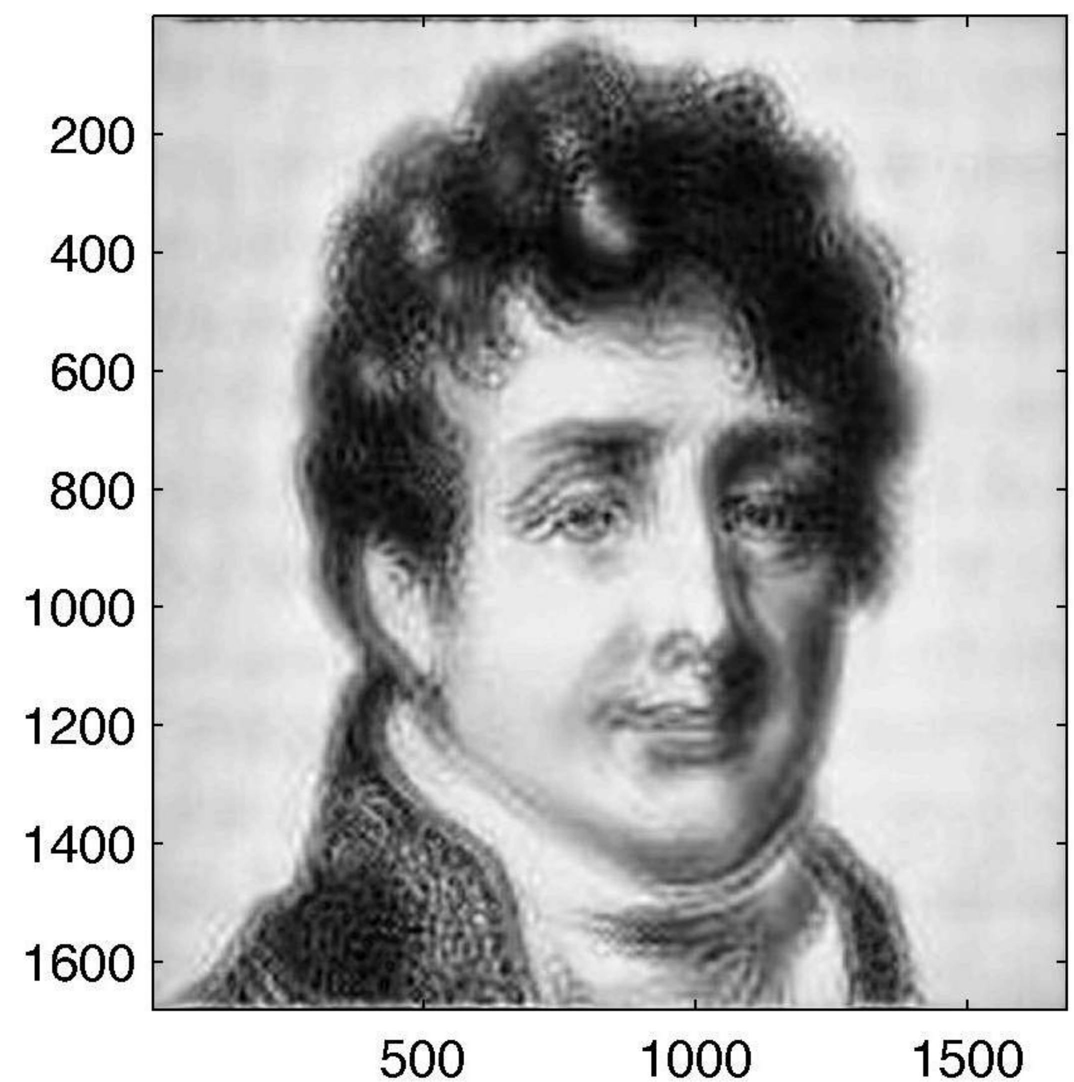
高斯光束的平行传播



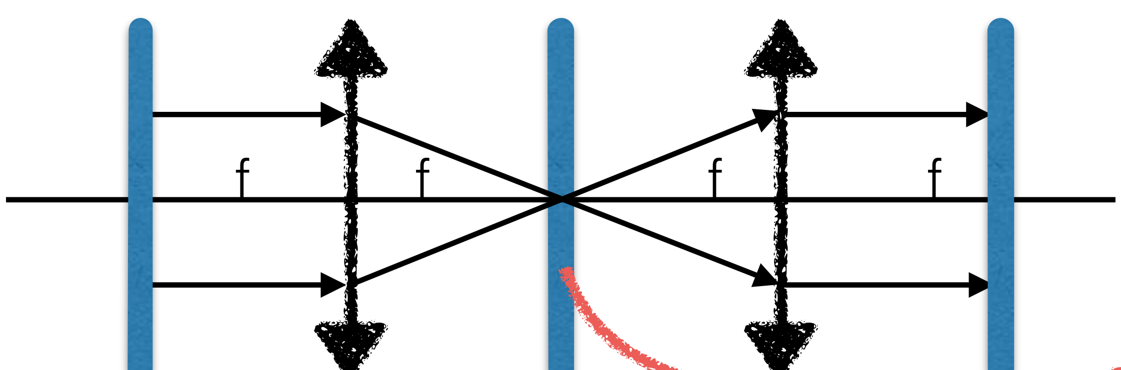
模拟结果展示

初始图

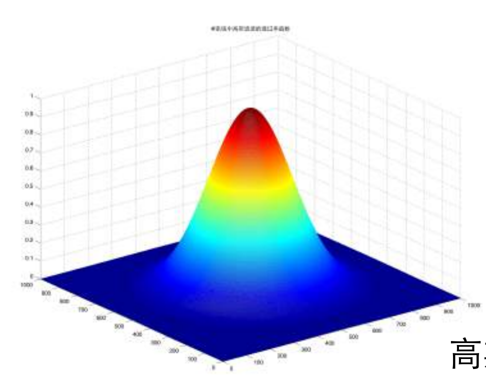
4f系统作为低通滤波器之后的图像



低通滤波VS美颜相机



高斯滤波



高斯低通滤波示例

致谢！

- 谢谢大家！
- 感谢朱哲远学长和潮兴滨老师的帮助