《高等量子力学》第 12 讲

6. 自旋关联与 Bell 不等式

1）量子力学的自旋测量关联

由上一节的计算，两电子体系的自旋单态 $\left|j_1,j_2,j,m\right\rangle=\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right\rangle$ 按无耦合表象基矢 $\left|j_1,m_1,j_2,m_2\right\rangle=\left|j_1,m_1\right\rangle\left|j_2,m_2\right\rangle$ 展开，

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle-\left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|s_{1z}^{+}\right\rangle\left|s_{2z}^{-}\right\rangle-\left|s_{1z}^{-}\right\rangle\left|s_{2z}^{+}\right\rangle\right)\end{aligned}$$

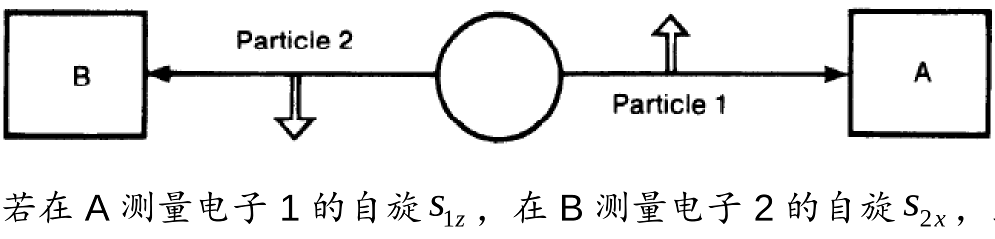
由单粒子自旋本征态的关系

$$\left|s_{iz}^{\pm}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|s_{ix}^{+}\right\rangle\pm\left|s_{ix}^{-}\right\rangle\right),\qquad i=1,2$$

自旋单态也可按 $\hat{S}_{1x},\hat{S}_{2x}$ 的本征态展开，

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|s_{1x}^{-}\right\rangle\left|s_{2x}^{+}\right\rangle-\left|s_{1x}^{+}\right\rangle\left|s_{2x}^{-}\right\rangle\right)。$$

如图，设处于自旋单态的两个电子从中心分别向两边探测器 A 和 B 运动。如果不考虑相对轨道角动量，那么总角动量守恒使两粒子体系始终处于自旋单态。设先在 A 测量电子 1 的自旋 s_{1z} 或 s_{1x}，紧接着在 B 测量电子 2 的自旋 s_{2x}。



1）若在 A 测量电子 1 的自旋 s_{1z}，在 B 测量电子 2 的自旋 s_{2x}，此时电子 2 的自旋态取 $\left|s_{2x}^{+}\right\rangle$ 和 $\left|s_{2x}^{-}\right\rangle$ 的几率相等，表明在 A，B 的两次测量无关联。

2）若在 A 测量电子 1 的自旋 s_{1x}，在 B 测量电子 2 的自旋 s_{2x}，此时电子子

2 的自旋态确定：当电子 1 处于$\left|s_{1x}^{+}\right\rangle$，则电子 2 处于$\left|s_{2x}^{-}\right\rangle$，而当电子 1 处于$\left|s_{1x}^{-}\right\rangle$，则电子 2 处于$\left|s_{2x}^{+}\right\rangle$。表明在 A，B 的两次测量有关联。

上面量子力学的自旋测量关联说明，只对 B 处的第 2 个粒子进行测量，就知道在 A 处对第 1 个粒子进行了什么测量，尽管 A，B 可能相距很远。

2）Einstein 定域原理与 Bell 不等式

许多物理学家对这种长程关联很困惑。他们提出**定域原理：粒子在 B 处的状态应该不依赖于另一个粒子在远处 A 的状态（EPR 佯谬, Einstein, Podolsky, Rosen, 1935）。**

那么，Einstein 定域原理与量子力学在测量结果上有差别吗？

考虑上面的两粒子系统。设测量满足 Einstein 定域原理，即不考虑测量之间的长程关联。对于其中一个粒子，一测 S_z 就有确定值$\left|s_{1z}^{+}\right\rangle$，一测 S_x 就有确定值$\left|s_{1x}^{+}\right\rangle$，标记为类型$\left(s_{1z}^{+}, s_{1x}^{+}\right)$。注意：1）并不是说可以同时测量 S_z 和 S_x，2）这与上面量子力学的测量不同，测量不受另一个粒子的测量影响。由于要求整个系统的自旋为单态，另一个粒子必处于类型$\left(s_{2z}^{-}, s_{2x}^{-}\right)$。依此类推，两粒子测量之间的可能关联及其几率是

粒子 1	粒子 2	几率
$\left(s_{1z}^{+}, s_{1x}^{+}\right)$	$\left(s_{2z}^{-}, s_{2x}^{-}\right)$	25%
$\left(s_{1z}^{+}, s_{1x}^{-}\right)$	$\left(s_{2z}^{-}, s_{2x}^{+}\right)$	25%
$\left(s_{1z}^{-}, s_{1x}^{+}\right)$	$\left(s_{2z}^{+}, s_{2x}^{-}\right)$	25%
$\left(s_{1z}^{-}, s_{1x}^{-}\right)$	$\left(s_{2z}^{+}, s_{2x}^{+}\right)$	25%

这个结果与上面的量子力学自旋测量结果是一致的。例如在 A 处测第一个粒子 S_{1z}，在 B 处测第二个粒子 S_{2x} 时，S_{2x} 取值为 s_{2x}^{+} 和 s_{2x}^{-} 的几率相等；当在 A 处

测第一个粒子s_{1x}，在 B 处测第二个粒子s_{2x}时，s_{2x}的取值确定。故看不出定域原理与量子力学测量的差别。

仍然考虑两粒子系统。但不是只测量两个方向，而是测量 3 个方向$\vec{e}_a,\vec{e}_b,\vec{e}_c$的自旋，即测量$s_a=\vec{s}\cdot\vec{e}_a$，$s_b=\vec{s}\cdot\vec{e}_b$，$s_c=\vec{s}\cdot\vec{e}_c$的取值（$\vec{e}_a,\vec{e}_b,\vec{e}_c$不必相互正交）。由 Einstein 定域原理，对于其中一个粒子，一测s_a就处于$\left|s_a^+\right\rangle$，一测s_b就处于$\left|s_b^+\right\rangle$，一测s_c就处于$\left|s_c^+\right\rangle$，标记为类型$\left(s_{1a}^+,s_{1b}^+,s_{1c}^+\right)$。由于要求整个系统的自旋为单态，另一个粒子必处于类型$\left(s_{1a}^-,s_{1b}^-,s_{1c}^-\right)$。依此类推，两粒子测量之间的可能关联及其几率是

粒子 1	粒子 2	几率
$\left(s_{1a}^+,s_{1b}^+,s_{1c}^+\right)$	$\left(s_{2a}^-,s_{2b}^-,s_{2c}^-\right)$	N_1
$\left(s_{1a}^+,s_{1b}^+,s_{1c}^-\right)$	$\left(s_{2a}^-,s_{2b}^-,s_{2c}^+\right)$	N_2
$\left(s_{1a}^+,s_{1b}^-,s_{1c}^+\right)$	$\left(s_{2a}^-,s_{2b}^+,s_{2c}^-\right)$	N_3
$\left(s_{1a}^+,s_{1b}^-,s_{1c}^-\right)$	$\left(s_{2a}^-,s_{2b}^+,s_{2c}^+\right)$	N_4
$\left(s_{1a}^-,s_{1b}^+,s_{1c}^+\right)$	$\left(s_{2a}^+,s_{2b}^-,s_{2c}^-\right)$	N_5
$\left(s_{1a}^-,s_{1b}^+,s_{1c}^-\right)$	$\left(s_{2a}^+,s_{2b}^-,s_{2c}^+\right)$	N_6
$\left(s_{1a}^-,s_{1b}^-,s_{1c}^+\right)$	$\left(s_{2a}^+,s_{2b}^+,s_{2c}^-\right)$	N_7
$\left(s_{1a}^-,s_{1b}^-,s_{1c}^-\right)$	$\left(s_{2a}^+,s_{2b}^+,s_{2c}^+\right)$	N_8

A 处的第 1 个粒子处于$\left|s_{1a}^+\right\rangle$而 B 处的第 2 个粒子处于$\left|s_{2b}^+\right\rangle$的几率是

$$P(s_{1a}^+,s_{2b}^+)=\left(N_3+N_4\right)/\sum_{i=1}^{8}N_i\ ,$$

A 处的第 1 个粒子处于$\left|s_{1a}^+\right\rangle$而 B 处的第 2 个粒子处于$\left|s_{2c}^+\right\rangle$的几率是

$$P(s_{1a}^{+},s_{2c}^{+})=\left(N_2+N_4\right)/\sum_{i=1}^{8}N_i\ ,$$

A 处的第 1 个粒子处于$\left|s_{1c}^{+}\right\rangle$而 B 处的第 2 个粒子处于$\left|s_{2b}^{+}\right\rangle$的几率是

$$P(s_{1c}^{+},s_{2b}^{+})=\left(N_3+N_7\right)/\sum_{i=1}^{8}N_i\ 。$$

由于

$$N_3+N_4\le(N_3+N_7)+(N_2+N_4)\ ,$$

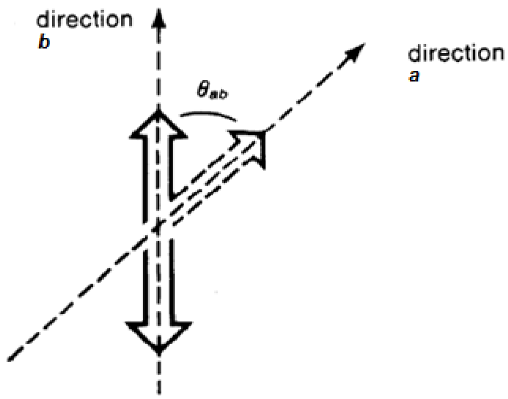
有

$$P(s_{1a}^{+},s_{2b}^{+})\le P(s_{1a}^{+},s_{2c}^{+})+P(s_{1c}^{+},s_{2b}^{+})\ ,$$

这就是 **Bell 不等式，它反映了 Einstein 定域原理对测量的影响。**

3）用量子力学计算几率

上面的 Bell 不等式与量子力学测量有何不同？下面用量子力学计算 Bell 不等式中的 3 个几率。



先计算$P(s_{1a}^{+},s_{2b}^{+})$。由自旋单态，当第 1 个粒子的s_{1a}处于$\left|s_{1a}^{+}\right\rangle$，第 2 个粒子的$s_{2a}$必处于$\left|s_{2a}^{-}\right\rangle$。再由前面关于自旋态转动的描述，$\left|s_{2a}^{-}\right\rangle$与$\hat{s}_{2b}$的本征态$\left|s_{2b}^{+}\right\rangle$之间可以通过转动联系起来。设$\vec{e}_b$与$\vec{e}_a$之间的夹角为$\theta_{ab}$，方位角为$\alpha_{ab}$，如图。对于第 2 个粒子，有

$$\left|s_{2a}^{-}\right\rangle=\cos\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}e^{-i\alpha_{ab}/2}\left|s_{2b}^{+}\right\rangle+\sin\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}e^{i\alpha_{ab}/2}\left|s_{2b}^{-}\right\rangle,$$

故当第二个粒子的 s_{2a} 处于 $\left|s_{2a}^{-}\right\rangle$ 时 s_{2b} 处于 $\left|s_{2b}^{+}\right\rangle$ 的几率是

$$\left|\cos\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}e^{-i\alpha_{ab}/2}\right|^{2}=\cos^{2}\frac{\pi-\theta_{ab}}{2}=\sin^{2}\frac{\theta_{ab}}{2}。$$

考虑到第 1 个粒子处于 $\left|s_{1a}^{+}\right\rangle$ 的几率是 1/2，有

$$P(s_{1a}^{+},s_{2b}^{+})=\frac{1}{2}\sin^{2}\frac{\theta_{ab}}{2},$$

同理，有

$$P(s_{1a}^{+},s_{2c}^{+})=\frac{1}{2}\sin^{2}\frac{\theta_{ac}}{2},$$

$$P(s_{1c}^{+},s_{2b}^{+})=\frac{1}{2}\sin^{2}\frac{\theta_{cb}}{2}$$

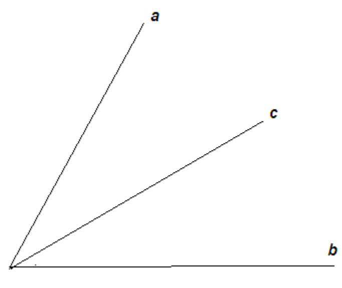
Bell 不等式

$$P(s_{1a}^{+},s_{2b}^{+})\le P(s_{1a}^{+},s_{2c}^{+})+P(s_{1c}^{+},s_{2b}^{+})$$

表明，对任意的 3 个矢量 $\vec{e}_a,\vec{e}_b,\vec{e}_c$ 都有关系

$$\sin^{2}\frac{\theta_{ab}}{2}\le\sin^{2}\frac{\theta_{ac}}{2}+\sin^{2}\frac{\theta_{cb}}{2}。$$

但是这个不等式并不总是成立的。例如，设 $\vec{e}_a,\vec{e}_b,\vec{e}_c$ 在同一平面上，$\theta_{ab}=2\theta,\ \ \theta_{ac}=\theta_{cb}=\theta$，



Bell 不等式导致

$$\sin^2\theta \le 2\sin^2\frac{\theta}{2}。$$

但是，如果取 $\theta = \pi/4$，Bell 不等式导致 $0.5 \le 0.292$。表明：如果量子力学计算与定域原理相容，将产生荒谬的结果。所以，**量子力学的计算与 Einstein 定域原理（Bell 不等式）不一致**。

4）实验结果

许多精确实验结果【包括最近荷兰 Ronald Hanson 团队发表在 Nature 的文章《Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometers》，doi:10.1038/nature15759，2015 年 10 月 21 日在线发表】，表明 Bell 不等式被破坏，并且结果在误差范围内与量子力学的预言一致。

如何理解量子力学，特别是测量，仍然是一个没有完全解决的问题。