《高等量子力学》第 6 讲

8）*Casimir* 效应

基态能（真空能、零点能）有无观测效应？

考虑量子电磁场的能量。电磁场是各种频率 ω_k（能量 $\hbar\omega_k$）的简谐振动的集合，空间单位体积内电磁场的总能量是

$$\varepsilon = 2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_k\,,$$

其中 $\omega_k = ck$，k 是波数，n 是能量为 $\hbar\omega_k$ 的光子的数目，2 是独立偏振的方向。

真空是无激发的态，$n=0$，真空能量

$$\varepsilon = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\hbar\omega_k$$

为无穷大。一般将它作为激发的本底扣除掉。问题是它本身是否有可观测效应？

在电磁场中放入两块平行的板，面积为 L^2，L 足够大，距离为 $a \ll L$。边界条件使得在 a 方向的波数受到限制，$k_z = \dfrac{n\pi}{a}$，在横方向由于 L 很大，无限制。利用 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_z}{2\pi} = 2\int_0^{\infty}\frac{dk_z}{2\pi} = \frac{1}{a}\sum_n$，在两板之间的体积 L^2a 内的真空能量为

$$E(a) = L^2 a\varepsilon = L^2\hbar c\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\sum_{n=0}\sqrt{k_\perp^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}\quad。$$

放入两块平行板前后真空能量的变化为

$$\Delta E(a) = E(a) - E_0(a) = L^2\hbar c\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\left(\sum_{n=0} - \int_0^{\infty} dn\right)\sqrt{k_\perp^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

这个变化使得两板之间每单位面积上的力

$$F(a) = -\frac{1}{L^2}\frac{\partial \Delta E(a)}{\partial a}\,。$$

注意 $E(a)$ 与 $E_0(a)$ 都是发散的（真空发散），但 $\Delta E(a)$ 是有限的。经过计算（见一般量子力学教科书，例如苏汝铿和张永德的书），有

$$F(a)=-\frac{\hbar c\pi^2}{240a^4}\text{。}$$

这个插入平行板后由于真空能量的变化（涨落）导致的吸引力以及与 a 的关系于 1958 年被实验观测到。这是真空能量的变化导致的可观测效应。

9）*Heisenberg* 绘景中的力学量时间演化

忽略下标 H，由 *Heisenberg* 绘景中的运动方程，有

$$\frac{d\hat{a}}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{a},\,\hat{H}\right]=-i\omega\hat{a},\qquad \frac{d\hat{a}^+}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{a}^+,\,\hat{H}\right]=i\omega\hat{a}^+,$$

解为 $$\hat{a}(t)=\hat{a}(0)e^{-i\omega t},\qquad \hat{a}^+(t)=\hat{a}^+(0)e^{i\omega t},$$

注意: $$\hat{a}^+(t)\hat{a}(t)=\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)$$

使得粒子数表象的基矢 $|n\rangle$ 与时间无关。

由

$$\hat{x}(t)=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}(t)+\hat{a}^+(t)\right)=\hat{x}(0)\cos\omega t+\frac{1}{m\omega}\hat{p}(0)\sin\omega t,$$

$$\hat{p}(t)=i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a}(t)-\hat{a}^+(t)\right)=\hat{p}(0)\cos\omega t-m\omega\hat{x}(0)\sin\omega t,$$

虽然 $\hat{x}(t),\,\hat{p}(t)$ 有振荡形式，但它们的平均值

$$\langle n|\hat{x}(t)|n\rangle=\langle n|\hat{x}(0)|n\rangle\cos\omega t+\frac{1}{m\omega}\langle n|\hat{p}(0)|n\rangle\sin\omega t=0\,,$$

$$\langle n|\hat{p}(t)|n\rangle=\langle n|\hat{p}(0)|n\rangle\cos\omega t-m\omega\langle n|\hat{x}(0)|n\rangle\sin\omega t=0$$

不随时间振荡。注意，此处用到了

$${}_H\langle n|\hat{x}(0)|n\rangle_H={}_S\langle n|\hat{x}_S|n\rangle_S=0,\qquad {}_H\langle n|\hat{p}(0)|n\rangle_H={}_S\langle n|[\hat{p}_S|n\rangle_S=0\text{。}$$

4. 谐振子的相干态

在谐振子的能量本征态$|n\rangle$，

$$\langle n|\hat{x}|n\rangle=\langle n|\hat{p}|n\rangle=0$$

$$\langle n|\hat{x}^2|n\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1),\qquad \langle n|\hat{p}^2|n\rangle=\frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1)$$

$$\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle\left\langle(\Delta p)^2\right\rangle=\left(\left\langle\hat{x}^2\right\rangle-\langle\hat{x}\rangle^2\right)\left(\left\langle\hat{p}^2\right\rangle-\langle\hat{p}\rangle^2\right)$$

$$=\left\langle\hat{x}^2\right\rangle\left\langle\hat{p}^2\right\rangle=\frac{\hbar^2}{4}(2n+1)^2\geq\frac{\hbar^2}{4}$$

能否找到这样的态，它最接近经典态？这就是下面要讨论的相干态$|\alpha\rangle$，是下降算符的本征态，

$$\hat{a}|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle,$$

注意：下降算符 $\hat{a}$ 不是厄米算符，本征值 α 一般是复数。

1) 相干态满足最小不确定关系

由 $\qquad\hat{a}|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle,\qquad\langle\alpha|\hat{a}^+=\langle\alpha|\alpha^*,$

有 $$\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\alpha|\hat{a}^++\hat{a}|\alpha\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\alpha^*+\alpha\right),$$

$$\langle\alpha|\hat{x}^2|\alpha\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}\left(1+\left(\alpha^*+\alpha\right)^2\right),$$

$$\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle=-i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\alpha-\alpha^*\right),$$

$$\langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle=\frac{\hbar m\omega}{2}\left(1-\left(\alpha-\alpha^*\right)^2\right),$$

$$\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle\left\langle(\Delta p)^2\right\rangle=\left(\left\langle\hat{x}^2\right\rangle-\langle\hat{x}\rangle^2\right)\left(\left\langle\hat{p}^2\right\rangle-\langle\hat{p}\rangle^2\right)=\frac{\hbar^2}{4},$$

故相干态$|\alpha\rangle$满足最小不确定关系，是最接近经典态的量子态。

2) 相干态的展开

将相干态$|\alpha\rangle$按能量本征态展开，

$$|\alpha\rangle=\sum_n c_n|n\rangle, \qquad c_n=\langle n|\alpha\rangle$$

由
$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^{+}\right)^n|0\rangle$$

$$c_n^*=\langle\alpha|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\langle\alpha|\left(\hat{a}^{+}\right)^n|0\rangle=\frac{\left(\alpha^*\right)^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle^*$$

$$c_n=\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle=\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0$$

$$|\alpha\rangle=c_0\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

由$|\alpha\rangle$的归一化，

$$1=\langle\alpha|\alpha\rangle=\sum_n\left|c_n\right|^2=\left|c_0\right|^2\sum_n\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}=\left|c_0\right|^2e^{|\alpha|^2},$$

$$c_0=e^{-|\alpha|^2/2},$$

故

$$|\alpha\rangle=\sum_n e^{-|\alpha|^2/2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle。$$

3) 谐振子的基态是相干态

对应基态$|0\rangle$，有

$$\hat{a}|0\rangle=0=0|0\rangle,$$

故$|0\rangle$是下降算符的本征态，本征值=0。

4) 本征值的时间演化

在 Heisenberg 绘景，

$$\hat{a}(t)=\hat{a}(0)e^{-i\omega t},$$
$$\hat{a}(t)\left|\alpha\right\rangle=\hat{a}(0)e^{-i\omega t}\left|\alpha\right\rangle=\alpha e^{-i\omega t}\left|\alpha\right\rangle$$

故本征值 $\alpha(t)=\alpha e^{-i\omega t}$ 。

5. 坐标表象的 Schroedinger 方程与 WKB 近似

抽象态 $\left|\psi,t\right\rangle$，

Schroedinger 方程 $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi,t\right\rangle=\hat{H}\left|\psi,t\right\rangle。$$

左乘以坐标算符 $\hat{\vec{x}}$ 的本征矢 $\left\langle\vec{x}\right|$，由于本征态在 Schroedinger 绘景中与时间无关，有

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\vec{x}|\psi,t\right\rangle=\left\langle\vec{x}\right|\hat{H}\left|\psi,t\right\rangle=\int d\vec{x}'\left\langle\vec{x}\right|\hat{H}\left|\vec{x}'\right\rangle\left\langle\vec{x}'|\psi,t\right\rangle$$

设 $$\hat{H}=\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}+V(\hat{\vec{x}})$$

因为 $$\left\langle\vec{x}\right|\hat{H}\left|\vec{x}'\right\rangle=\delta(\vec{x}-\vec{x}')\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{x})\right)$$

故 $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\vec{x}|\psi,t\right\rangle=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{x})\right)\left\langle\vec{x}|\psi,t\right\rangle,$$

$\psi(\vec{x},t)=\left\langle\vec{x}|\psi,t\right\rangle$ 称为波函数，这就是坐标表象的 Schroedinger 方程。

1）定态 Schroedinger 方程

令 $$\psi(\vec{x},t)=\varphi(\vec{x})T(t)$$

代入 Schroedinger 方程，如果 $\hat{H}$ 不含时间，Schroedinger 方程退耦为两个方程，其中关于 T 的方程的解有

$$T(t)=e^{-\frac{i}{\hbar}Et},$$

E 和 $\varphi(\vec{x})$ 由另一个方程，即能量本征方程确定，

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{x})\right)\varphi_E(\vec{x})=E\varphi_E(\vec{x}),$$

定态 $$\psi_E(\vec{x},t)=\varphi_E(\vec{x})e^{-\frac{i}{\hbar}Et}。$$

对于束缚态，束缚条件

$$\underset{|\vec{x}|\to\infty}{Lim}\ \varphi_E(\vec{x})\to 0$$

导致 E 为分离值。

定态只是 $\hat{H}$ 不含时间时 *Schroedinger* 方程的特解，一般解是定态的线性迭加

$$\psi(\vec{x},t)=\sum_E c_E\psi_E(\vec{x},t)。$$

2）波函数的几率解释

单位时间单位体积内发现粒子的几率密度

$$\rho(\vec{x},t)=\left|\psi(\vec{x},t)\right|^2=\psi^*(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t),$$

当 $V(\vec{x})$ 是实函数时，*Schroedinger* 方程可以写成连续性方程的形式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x},t)+\nabla\cdot\vec{j}(\vec{x},t)=0,$$

$$\vec{j}(\vec{x},t)=-\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*(\vec{x},t)\ \nabla\psi(\vec{x},t)-\psi(\vec{x},t)\ \nabla\psi^*(\vec{x},t)\right)$$

$\vec{j}$ 的物理意义是什么？将连续性方程对有限空间积分：

$$\int_V d^3\vec{r}\,\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)+\int_V d^3\vec{r}\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)=0,$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}} d^3\vec{r}\rho(\vec{r},t) = -\int_{\vec{\mathrm{S}}} d\vec{S}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)$$

定域几率守恒：区域 V 内几率的变化=流出面积$\vec{\mathrm{S}}$的几率，故称$\vec{j}$为几率流密度。若对整个空间积分：

$$\frac{d}{dt}\int_{\infty} d^3\vec{r}\rho(\vec{r},t) = -\int_{\infty} d\vec{S}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0,$$

故$\int_{\infty} d^3\vec{r}\rho(\vec{r},t)$与时间无关，是一常数。

意味着

a）总几率守恒，无粒子的产生与消灭，*Schroedinger* 方程是非相对论的；

b）若波函数是归一的，则归一化与时间无关。*Schroedinger* 方程保证了归一性不随时间而变化；

c）若 V 是复函数，几率不守恒，可以等效地描述粒子的产生与消灭。

3）定态方程的 *WKB* 近似

可以严格求解的 *Schroedinger* 方程很少。将 *Schroedinger* 方程按照$\hbar$进行展开，逐级近似求解的方法称为 *WKB* 近似（*Wentzel*，*Kramers*，*Brillouin*）。

定态波函数

$$\psi(x,t) = \varphi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \equiv e^{\frac{i}{\hbar}s(x)}e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = e^{\frac{i}{\hbar}(s(x)-Et)},$$

代入定态方程

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right)\psi(x,t) = E\psi(x,t),$$

有
$$\left[\frac{(\partial_x s)^2}{2m} + V(x) - E - \frac{i\hbar\partial_x^2 s}{2m}\right]e^{\frac{i}{\hbar}s} = 0。$$

将$s(x)$按照$\hbar/i$展开，

$$s(x)=s_0(x)+\frac{\hbar}{i}s_1(x)+\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 s_2(x)+\ldots$$

代入，在方程两边取$\hbar$的相同幂次，有

$$\hbar^0: \qquad (\partial_x s_0)^2+2m\big(V(x)-E\big)=0$$

$$\hbar^1: \qquad \partial_x s_1 \partial_x s_0+\frac{1}{2}\partial_x^2 s_0=0$$

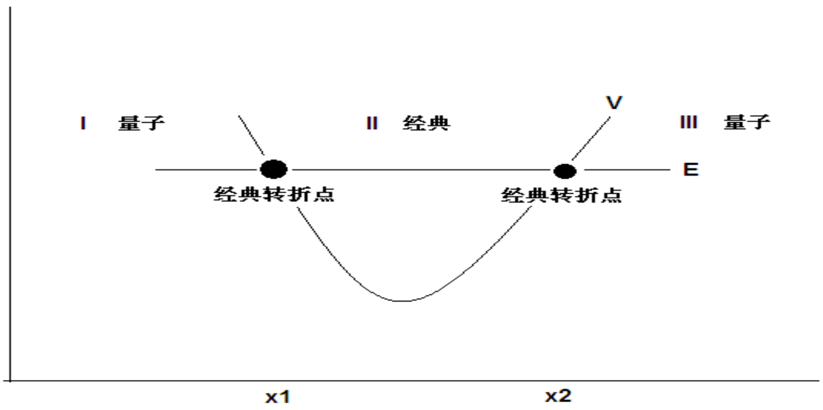
……

解为

$$s_0(x)=\pm\int^x \sqrt{2m(E-V(x'))}dx'+C$$

$$s_1(x)=-\ln\sqrt{\sqrt{2m(E-V(x))}}+\bar{C}$$

……



精确到$\hbar^1$，在经典区间，$E>V$，

$$\psi_{II}(x)=e^{\frac{i}{\hbar}\left(s_0(x)+\frac{\hbar}{i}s_1(x)\right)}$$

$$=\frac{C_1}{\sqrt{\sqrt{2m(E-V(x))}}}e^{\frac{i}{\hbar}\int^x\sqrt{2m(E-V(x'))}dx'}+\frac{C_2}{\sqrt{\sqrt{2m(E-V(x))}}}e^{-\frac{i}{\hbar}\int^x\sqrt{2m(E-V(x'))}dx'}$$

在非经典区间，即$E<V$区间，

$$\psi_{I,III}(x) = \frac{C_3}{\sqrt{\sqrt{2m(V(x)-E)}}} e^{-\frac{1}{\hbar}\int^x \sqrt{2m(V(x)-E)}dx'} + \frac{C_4}{\sqrt{\sqrt{2m(V(x)-E)}}} e^{\frac{1}{\hbar}\int^x \sqrt{2m(V(x)-E)}dx'}$$

在 $E = V$，解是发散的，*WKB* 近似不能用了。

$$E - V(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_i$$

称为经典转折点。如何求解 x_i 附近的解？

在 x_i 附件将 $V(x)$ 展开至线性项，

$$V(x) = V(x_0) + \left|\frac{dV}{dx_0}\right|(x - x_0)$$

代入定态 *Schroedinger* 方程，有

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}\frac{dV}{dx_0}(x - x_0) = 0,$$

求其精确解，是 $\pm 1/3$ 阶的 *Bessel* 函数。然后考虑 *Bessel* 函数在 $|x - x_0|$ 较大时的渐近解，并要求与 x_0 左右两边的经典区间解和非经典区间解连续。这样可以把经典区间解和非经典区间解中的常数 C_1, C_2, C_3, C_4 确定下来。