《高等量子力学》第 7 讲

6. *Feynman* 路径积分

1）*Schroedinger* 绘景中的传播子

将态的时间演化

$$|\psi,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\psi,t_0\rangle$$

进入坐标表象

$$\langle\vec{x}|\psi,t\rangle = \langle\vec{x}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\psi,t_0\rangle = \int d^3\vec{x}_0\,\langle\vec{x}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\vec{x}_0\rangle\langle\vec{x}_0|\psi,t_0\rangle\,,$$

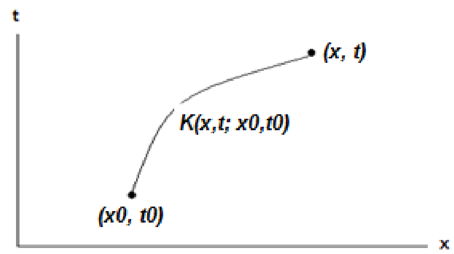
时间演化算符在坐标表象的矩阵元

$$K(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0) = \langle\vec{x}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\vec{x}_0\rangle\,,$$

有

$$\psi(\vec{x},t) = \int d^3\vec{x}_0 K(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0)\psi(\vec{x}_0,t_0)\,,$$

说明 $K(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0)$ 是传播子，将时空中的初态波函数 $\psi(\vec{x}_0,t_0)$ 传播到末态波函数 $\psi(\vec{x},t)$。积分意味着初态所有可能的空间位置都对末态有贡献。



由于

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0) = \langle\vec{x}|\hat{H}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\vec{x}_0\rangle = \int d^3\vec{x}_1\,\langle\vec{x}|\hat{H}|\vec{x}_1\rangle\langle\vec{x}_1|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\vec{x}_0\rangle$$

$$= \int d^3\vec{x}_1\hat{H}(\vec{x})\delta(\vec{x}-\vec{x}_1)K(\vec{x}_1,t;\vec{x}_0,t_0) = \hat{H}(\vec{x})K(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0)$$

表明传播子满足 *Schroedinger* 方程。

注意到

$$
\begin{aligned}
\int d^3\vec{x} K(\vec{x},t;\vec{x},0) &= \int d^3\vec{x} \langle \vec{x} | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} | \vec{x} \rangle \\
&= \sum_E \int d^3\vec{x} \langle \vec{x} | E \rangle \langle E | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} | \vec{x} \rangle \\
&= \sum_E \int d^3\vec{x} \langle E | x \rangle \langle x | E \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \\
&= \sum_E e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \\
&\overset{it/\hbar \to 1/T\,(\text{虚时})}{=} \text{配分函数} Z = \sum_E e^{-E/T}
\end{aligned}
$$

表明**虚时封闭传播子与热力学的关系，提供了用动力学计算热力学的途径**。

例 1：求一维自由粒子的传播子

$$
\begin{aligned}
K(x,t;x_0,t_0) &= \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} | x_0 \rangle \\
&= \int dp \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} | p \rangle \langle p | x_0 \rangle \\
&= \int dp \langle x | p \rangle \langle p | x_0 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t-t_0)} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar}\left[p(x-x_0)-\frac{p^2}{2m}(t-t_0)\right]} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t-t_0)}} e^{\frac{im(x-x_0)^2}{2\hbar(t-t_0)}}
\end{aligned}
$$

知道了这个传播子，初始时刻的平面波（定态）的时间演化，

$$
\psi(x_0,t_0) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{i}{\hbar}(px_0 - Et_0)} = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{i}{\hbar}\left(px_0 - \frac{p^2}{2m}t_0\right)}
$$

$$
\psi(x,t) = \int dx_0 K(x,t;x_0,t_0)\ \psi(x_0,t_0)
$$

是一个波包。

例 2：求一维线性谐振子的传播子

$$
\begin{aligned}
K(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0) &= \langle \vec{x} | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} | \vec{x}_0 \rangle \\
&= \sum_n \langle \vec{x} | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} | n \rangle \langle n | x_0 \rangle \\
&= \sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(x_0) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}
\end{aligned},
$$

E_n，$\psi_n(x)$ 分别是谐振子的能级和在坐标表象的波函数。

2）*Heisenberg* 绘景中的跃迁振幅

以上讨论的是 *Schroedinger* 绘景中态的时空演化。传播子

$$
\begin{aligned}
K(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0) &= \langle \vec{x} | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} | \vec{x}_0 \rangle \\
&= \left(\langle \vec{x} | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \right) \left(e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t_0} | \vec{x}_0 \rangle \right) \\
&= \left(\langle \vec{x},0 | U(t,0) \right) \left(U^+(t_0,0) | \vec{x}_0,0 \rangle \right) \\
&= {}_H\langle \vec{x},t | \vec{x}_0,t_0 \rangle_H
\end{aligned}
$$

也可以看成是 *Heisenberg* 绘景中 t_0 时的坐标本征态 $|\vec{x}_0,t_0\rangle$ 跃迁到 t 时刻的坐标本征态 $|\vec{x},t\rangle$ 的振幅，故**传播子也是坐标本征态的跃迁振幅**。

由坐标表象的完备性条件(在同一时刻)，

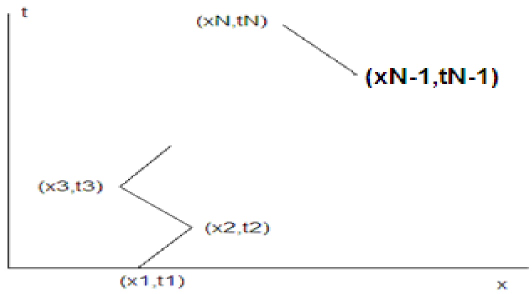
$$\int d^3\vec{x} | \vec{x},t \rangle \langle \vec{x},t | = 1,$$

$$
\begin{aligned}
K(\vec{x}_3,t_3;\vec{x}_1,t_1) &= \langle \vec{x}_3,t_3 | \vec{x}_1,t_1 \rangle \\
&= \int d^3\vec{x}_2 \langle \vec{x}_3,t_3 | \vec{x}_2,t_2 \rangle \langle \vec{x}_2,t_2 | \vec{x}_1,t_1 \rangle \\
&= \int d^3\vec{x}_2 K(\vec{x}_3,t_3;\vec{x}_2,t_2) K(\vec{x}_2,t_2;\vec{x}_1,t_1), \qquad t_3 > t_2 > t_1
\end{aligned}
$$

这是**传播子的相乘性，从 $(\vec{x}_1,t_1)$ 传播到 $(\vec{x}_3,t_3)$ 等于从 $(\vec{x}_1,t_1)$ 传播到 $(\vec{x}_2,t_2)$ 再传播到 $(\vec{x}_3,t_3)$ 。**

考虑一维情况。将时间间隔 $t_N - t_1$ 进行 N 等分 $dt = \dfrac{t_N - t_1}{N-1}$，

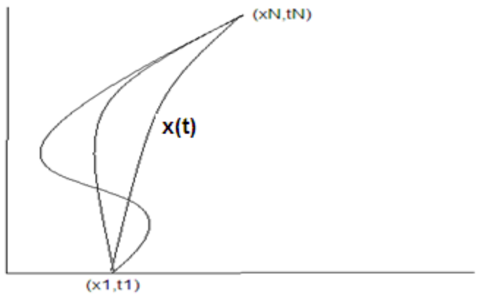
$$K(x_N,t_N;x_1,t_1) =$$
$$\int dx_{N-1}dx_{N-2}...dx_2 K(x_N,t_N;x_{N-1},t_{N-1})K(x_{N-1},t_{N-1};x_{N-2},t_{N-2})...K(x_2,t_2;x_1,t_1),$$



当 $N \to \infty$ 时，即 $dt \to 0$ 时，多重积分转变成对路径的求和，表明**量子力学中所有路径都对时空演化有贡献，**

$$K(x_N,t_N;x_1,t_1) = \int_{x_1}^{x_N} [dx(t)]\, P[x(t)] \quad ,$$

其中 $P[x(t)]$ 是取路径为 $x(t)$ 的几率幅。



注意，**经典力学中的时空演化只有一条唯一的路径，由最小作用量确定**。 例如，对于高度为 h，重力加速度为 g 的自由落体运动，唯一的路径就是

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \text{。}$$

3）*Feynman* 路径积分量子化

设粒子从 (x_1,t_1) 运动到 (x_N,t_N) 的任意一条路径 $x(t)$ 的几率幅是

$$P[x(t)] = ce^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}, \quad S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_N} L_c(x,\dot{x})dt, \quad L_c = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}),$$

粒子从 (x_1,t_1) 跃迁到 (x_N,t_N) 的跃迁振幅是

$$K(x_N,t_N;x_1,t_1) = c\int_{x_1}^{x_N} [dx(t)]e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]} \quad 。$$

如果将路径积分还原成多重积分形式，令 $dt = \dfrac{t_N - t_1}{N-1}$，

$$K(x_N,t_N;x_1,t_1) = c\lim_{N\to\infty}\int dx_{N-1}dx_{N-2}...dx_2 e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=2}^{N} L_c(x_n,\dot{x}_n)dt} \quad 。$$

当 L_c 是 X 的二次型时，路径积分为高斯型，严格可积。比如自由粒子

$$L_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

$$L_c(x_n,\dot{x}_n)dt = \frac{1}{2}m\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{dt}\right)^2 dt = \frac{m}{2dt}\left(x_n - x_{n-1}\right)^2$$

$$K(x_N,t_N;x_1,t_1) = c\lim_{N\to\infty}\int dx_{N-1}dx_{N-2}...dx_2 e^{\frac{im}{2\hbar dt}\sum_{n=2}^{N}\left(x_n - x_{n-1}\right)^2} = ce^{\frac{im\left(x_N - x_1\right)^2}{2\hbar(t_N - t_1)}}$$

由坐标本征态的等时正交归一化条件

$$\langle x_N,t_1 | x_1,t_1\rangle = K(x_N,t_1;x_1,t_1) = \delta\left(x_N - x_1\right),$$

$$K(x_N,t_N;x_1,t_1) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_N - t_1)}}e^{\frac{im\left(x_N - x_1\right)^2}{2\hbar(t_N - t_1)}},$$

与在 *Schroedinger* 绘景的计算结果一样。

再比如谐振子，

$$L_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

高斯积分后，有

$$K(x_N,t_N;x_1,t_1) = \sqrt{\frac{m\omega}{2i\pi\hbar\sin[\omega(t_N - t_1)]}}\, e^{\frac{im\omega}{2\hbar\sin[\omega(t_N-t_1)]}\left[\left(x_1^2+x_N^2\right)\cos[\omega(t_N-t_1)]-2x_1x_N\right]}.$$

4）讨论：

（1）每条路径贡献的相因子 $e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$ 都不同。对于经典体系，经典路径对应的最小作用量 S_{cl} 远比 $\hbar$ 大，那么经典路径周围的其它路径的作用量更大，其贡献会随路径而剧烈振荡，以致相互抵销，只留下最小作用量的贡献。

（2）只有高斯型路径积分是可积的。

（3）$K(\vec{x},t;\vec{x}_0,t_0)$ **的不同解释：是 *Schroedinger* 绘景中（量子）波函数的传播子，是 *Heisenberg* 绘景中（量子）坐标本征态的跃迁几率幅，是 *Feynman* 路径积分中（经典）粒子运动路径的几率幅。**

（4）**路径积分量子化是经典力学的自然推广，容易理解，不用引入算符等 Q 数，完全在 C 数范围内计算。但是**路径积分在非相对论量子力学中处理问题较麻烦，而在规范场论中有重要作用。

7. 规范变换

1）常数势差导致的量子相干性

经典力学中，$\vec{F} = -\nabla V(\vec{x})$，将势加上一个与空间无关的常数后不带来任何效用。在量子力学中，设粒子在势场 V_1 中运动，初态 $|\alpha,t_0\rangle$ 的演化为

$$|\alpha,t\rangle_1 = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1(t-t_0)}|\alpha,t_0\rangle,$$

如果粒子在势场$V_2(t)=V_1+\Delta V(t)$中运动，初态$|\alpha,t_0\rangle$的演化为

$$|\alpha,t\rangle_2=e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1(t-t_0)}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt'\Delta V(t')}|\alpha,t_0\rangle=e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt'\,\Delta V(t')}|\alpha,t\rangle_1$$

两个态之间的差别是一个相因子$e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}$，

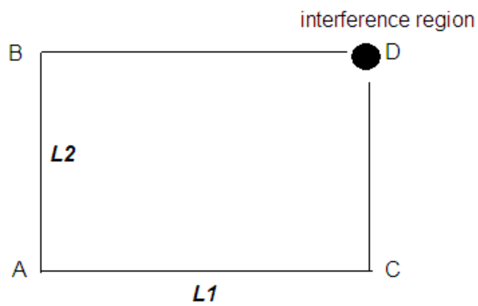
$$\varphi_2-\varphi_1=-\frac{1}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt'\Delta V(t')\xrightarrow{\text{时间常数势差}}-\frac{1}{\hbar}\Delta V\left(t-t_0\right)$$

似乎不带来可测量性结果。但如果考虑这两个波函数$|\alpha,t_1\rangle$和$|\alpha,t_2\rangle$的相干，相位差$(\varphi_2-\varphi_1)$会导致相干项$\cos(\varphi_2-\varphi_1)$，产生可观测性。

2）重力势差导致的量子相干性

考虑热中子（不带电）在重力场中的运动。金属框 ABCD 平行于地面。在 A 处把中子分成两束，一束经 AC 和 CD 到达点 D，另一束经 AB 和 BD 到达点 D。由于中子在两条路径上感受到的重力势相同，在 D 处无相干现象。但是，如果以 AC 为轴将框向上转一角度δ，则粒子在 BD 部分相比 AC 部分有一常数势差

$$\Delta V=mgl_2\sin\delta$$



虽然粒子在 AB 和 CD 部分相比于 AC 部分也有势差，而且与空间位置有关，但对两条路径有相同的的势差，对相位差无贡献。设粒子从 B 到 D 的时间是 T，则粒子经过两条路径的势差导致在 D 处产生相位差

$$\varphi_{ABD}-\varphi_{ACD}=-\frac{m}{\hbar}gl_2T\sin\delta,$$

由于$T=l_1/\mathrm{v}$, v是粒子（波包）速度，$m\mathrm{v}=p=\hbar/\lambda$, λ是中子的 de Broglie 波长，$T=l_1m\lambda/\hbar$，

$$\varphi_{ABD}-\varphi_{ACD}=-\left(\frac{m}{\hbar}\right)^2gl_1l_2\lambda\sin\delta。$$

当角度δ变化时，相干项$\cos(\varphi_{ABD}-\varphi_{ACD})$会随之产生振荡。实验确实发现了这种振荡，见书中图 2.6。

以上讨论表明，**空间均匀的势差虽然不改变力，但导致量子相干效应。**