《高等量子力学》第 8 讲

3）电磁学中的规范变换

标势与矢势　　$\varphi(\vec{x},t)$，$\vec{A}(\vec{x},t)$，

场强　　$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$，$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$。

由经典电动力学，带电粒子在电磁场中运动的哈密顿算符

$$\hat{H}=\frac{\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\hat{\vec{A}}\right)^2}{2m}+e\hat{\varphi},\qquad \text{其中 } \hat{\varphi}=\hat{\varphi}(\hat{\vec{x}},t),\ \hat{\vec{A}}=\hat{\vec{A}}(\hat{\vec{x}},t)。$$

利用基本对易关系

$$\left[\hat{x}_i,\hat{x}_j\right]=\left[\hat{p}_i,\hat{p}_j\right]=0,\qquad \left[\hat{x}_i,\hat{p}_j\right]=i\hbar\delta_{ij}$$

有

$$\left[\left(\hat{p}_i-\frac{e}{c}\hat{A}_i\right),\ \left(\hat{p}_j-\frac{e}{c}\hat{A}_j\right)\right]=\frac{i\hbar e}{c}\varepsilon_{ijk}\hat{B}_k,$$

此处已将 $\hat{A}(\hat{x})$ 对 $\hat{x}$ 进行展开。

Heisenberg 绘景中的运动方程为

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{x}_i,\hat{H}\right]=\frac{1}{2mi\hbar}\left[\hat{x}_i,\left(\hat{p}_j-\frac{e}{c}\hat{A}_j\right)\left(\hat{p}_j-\frac{e}{c}\hat{A}_j\right)\right]=\frac{1}{m}\left(\hat{p}_i-\frac{e}{c}\hat{A}_i\right),$$

$$m\frac{d^2\hat{x}_i}{dt^2}=\frac{d\left(\hat{p}_i-\frac{e}{c}\hat{A}_i\right)}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\left[\left(\hat{p}_i-\frac{e}{c}\hat{A}_i\right),\hat{H}\right]$$

$$=\frac{e}{2mc}\varepsilon_{ijk}\left(\hat{p}_j-\frac{e}{c}\hat{A}_j\right)\hat{B}_k-\frac{e}{2mc}\varepsilon_{ijk}\hat{B}_j\left(\hat{p}_k-\frac{e}{c}\hat{A}_k\right)-e\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\hat{x}_i},$$

$$m\frac{d^2\hat{\vec{x}}}{dt^2}=e\left[\hat{\vec{E}}+\frac{1}{2c}\left(\frac{d\hat{\vec{x}}}{dt}\times\hat{\vec{B}}-\hat{\vec{B}}\times\frac{d\hat{\vec{x}}}{dt}\right)\right]$$

此即 *Heisenberg* 绘景中的 *Ehrenfest* 定理。注意，$\hat{\vec{x}}$ 与 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 不对易。

在 *Schroedinger* 绘景中的坐标表象，有 *Schroedinger* 方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(\vec{x},t\right)=\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla-\frac{e\vec{A}(\vec{x})}{c}\right)^2+e\varphi(\vec{x})\right]\psi\left(\vec{x},t\right)。$$

将势进行变换，

$$\varphi(\vec{x},t)\to\varphi(\vec{x},t)\text{保持不变，}\qquad \vec{A}(\vec{x},t)\to\vec{A}(\vec{x},t)+\nabla\Lambda(\vec{x}),$$

其中 $\Lambda(\vec{x})$ 为任意标量函数。显然，场强 $\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$，$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 保持不变。

称这类**势变化而场强不变的变换为规范变换，不同的 $\Lambda(\vec{x})$ 称为不同的规范。**

设势 $\varphi(\hat{\vec{x}},t),\ \vec{A}(\hat{\vec{x}},t)$ 对应的态为 $\left|\psi,t\right\rangle_1$，势 $\varphi(\hat{\vec{x}},t),\ \vec{A}(\hat{\vec{x}},t)+\nabla\Lambda(\hat{\vec{x}})$ 对应的态为 $\left|\psi,t\right\rangle_2$，各自满足 *Schroedinger* 方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi,t\right\rangle_1=\left[\frac{\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\hat{\vec{A}}(\hat{\vec{x}})\right)^2}{2m}+e\hat{\varphi}(\hat{\vec{x}})\right]\left|\psi,t\right\rangle_1,$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi,t\right\rangle_2=\left[\frac{\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\left(\hat{\vec{A}}(\hat{\vec{x}})+\nabla\hat{\Lambda}(\hat{\vec{x}})\right)\right)^2}{2m}+e\hat{\varphi}(\hat{\vec{x}})\right]\left|\psi,t\right\rangle_2,$$

利用

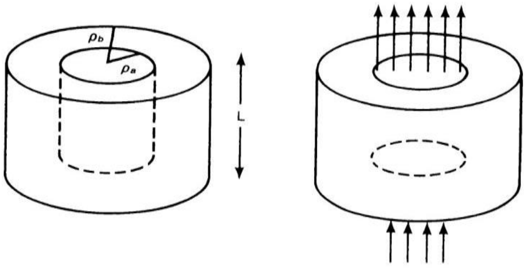
$$e^{-\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\hat{\vec{x}})}\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\left(\vec{A}(\hat{\vec{x}},t)+\nabla\Lambda(\hat{\vec{x}})\right)\right)e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\hat{\vec{x}})}=\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}(\hat{\vec{x}},t),$$

容易证明

$$\left|\psi,t\right\rangle_2=e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\hat{\vec{x}})}\left|\psi,t\right\rangle_1,$$

表明，在规范变化下，两个态只相差一个定域相因子，与前面重力势结果相同。

4）AB 效应(Aharonov-Bohm)



如图，半径为 ρ_a 和 ρ_b 的圆筒构成无限长的空心圆柱壳层。粒子在 $\rho_a<\rho<\rho_b$ 的壳中运动，不能运动到 $\rho<\rho_a$ 和 $\rho>\rho_b$ 的空间。波函数在 $\rho=\rho_a$ 和 $\rho=\rho_b$ 处为零，在 $\rho_a<\rho<\rho_b$ 区间是一个束博态问题，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\psi_1=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right]^2\psi_1=E_1\psi_1\,,$$

要求波函数 ψ_1 满足束博条件 $\psi_1(\rho_a,\theta,\varphi)=\psi_1(\rho_b,\theta,\varphi)=0$ 和周期条件 $\psi_1(\rho,\theta,\varphi)=\psi_1(\rho,\theta,\varphi+2n\pi)$，它们决定了束博态能级 E_1。

现在中间空心处放一个长的螺线管，使得产生的磁场限制在管内，保证管外的磁场为零，即

$$\vec{B}=\begin{cases}0, & \rho>\rho_a\\ B\vec{e}_z, & \rho<\rho_a\end{cases},$$

考虑到在柱坐标系中

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix},$$

有

$$\vec{A}=\begin{cases}\dfrac{B\rho_a^2}{2\rho}\vec{e}_\varphi, & \rho>\rho_a\\ \dfrac{B\rho}{2}\vec{e}_\varphi, & \rho<\rho_a\end{cases}。$$

表明：在$\rho<\rho_a$的区间放一个磁场，导致在$\rho_a<\rho<\rho_b$的区间进行了一个规范变换：由$\vec{A}=0$到$\vec{A}\neq 0$，但该区间的磁场$\vec{B}=0$没变化。由规范变换满足的关系

$$\vec{\nabla}\Lambda=\vec{A}=\frac{B\rho_a^2}{2\rho}\vec{e}_\varphi$$

和柱坐标系中的梯度

$$\vec{\nabla}\Lambda=\frac{\partial\Lambda}{\partial\rho}\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\vec{e}_z\,,$$

有

$$\Lambda=\frac{B\rho_a^2}{2}\varphi\,。$$

则规范变换后的波函数为

$$\psi_2=e^{\frac{ieB\rho_a^2}{2\hbar c}\varphi}\psi_1\,。$$

考虑到ψ_2已经满足边界条件$\psi_2(\rho_a,\theta,\varphi)=\psi_2(\rho_b,\theta,\varphi)=0$，周期性条件$\psi_2(\rho,\theta,\varphi)=\psi_2(\rho,\theta,\varphi+2n\pi)$导致**管量子化**

$$e^{i\frac{eB\rho_a^2}{2\hbar c}\varphi}=e^{i\frac{eB\rho_a^2}{2\hbar c}(\varphi+2n\pi)}\,,$$

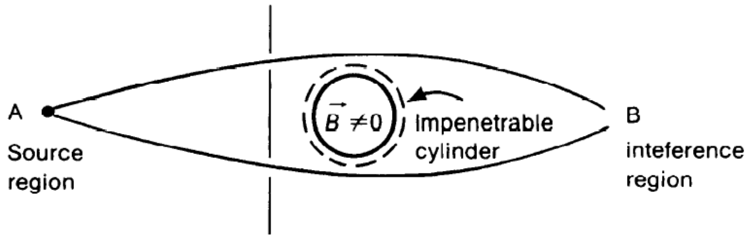
即
$$\pi\rho_a^2B=\frac{2\pi n\hbar c}{e}\,。$$

如果磁场和圆筒半径不满足上述量子化条件，则$\psi_2\neq e^{i\frac{eB\rho_a^2}{2\hbar c}\varphi}\psi_1$，能量$E_2\neq E_1$。表明，虽然磁场$\vec{B}$不出现在粒子的运动区间，但势$\vec{A}$出现在粒子的运动区间。只有势场而无场强也对体系的束博性质有影响，这是单纯的量子效应。

以上是 AB 效应对束搏态问题的影响。

现在用路径积分来考虑规范变换带来的干涉效应。带电粒子从点A出发经

屏上的两个缝到达点 B，在 B 处发生干涉现象。屏后两缝之间有一长螺旋管，管内有磁场 $\vec{B}$，管外无磁场，但势 $\vec{A}\neq 0$。路径积分中的作用量



$$S(\vec{x}(t))=\int_{t_A}^{t_B}dt\,\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\approx\int_{t_A}^{t_B}dt\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2-\frac{e}{c}\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{A}\right]$$

$$=S_0(\vec{x}(t))-\frac{e}{c}\int_{t_A}^{t_B}dt\,\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{A}=S_0(\vec{x}(t))-\frac{e}{c}\int_{x_A}^{x_B}\vec{A}\cdot d\vec{x},$$

已略去 $\vec{A}^2$ 项。对于任意一条螺线管以上的路径和任意一条螺线管以下的路径，对几率幅的贡献 $K(x_B,t_B;x_A,t_A)=e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$ 分别是

$$e^{-\frac{ie}{\hbar c}\left[\int_{x_A}^{x_B}\vec{A}\cdot d\vec{x}\right]_{above}}e^{\frac{i}{\hbar}S_0(\vec{x}(t))},\qquad e^{-\frac{ie}{\hbar c}\left[\int_{x_A}^{x_B}\vec{A}\cdot d\vec{x}\right]_{below}}e^{\frac{i}{\hbar}S_0(\vec{x}(t))}$$

存在一个影响干涉条纹的相对相因子

$$\frac{e}{\hbar c}\left(\left[\int_{x_A}^{x_B}\vec{A}\cdot d\vec{x}\right]_{above}-\left[\int_{x_A}^{x_B}\vec{A}\cdot d\vec{x}\right]_{below}\right)=\frac{e}{\hbar c}\oint\vec{A}\cdot d\vec{x}$$

$$=\frac{e}{\hbar c}\int\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{s}$$

$$=\frac{e}{\hbar c}\int\vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$=\frac{e}{\hbar c}B\pi R^2$$

与路径无关。因此在 B 出将出现干涉效应。此处用到了 *Stokes* 定理。

AB 效应表明，在量子力学中，虽然场强为零，只要势不为零，也会影响粒

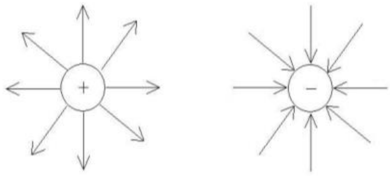
子的干涉。

5）磁单极

在经典电磁场中，静磁场与静电场完全不对称。静电场有源无旋，满足

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=4\pi\rho_e, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=0\ ,$$

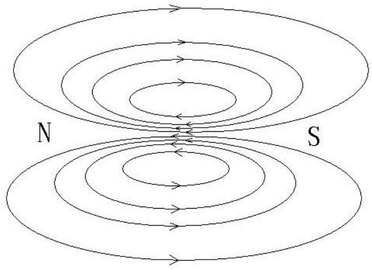
电力线分布（单电荷结构）:



静磁场有旋无源，满足

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}\ ,$$

磁力线分布（**Dipole 结构**）:



问题：是否也存在单独的磁荷，即磁单极（Monopole 结构）？

如果在原点存在单个的磁荷 e_m，则它所产生的静磁场满足

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=-4\pi e_m\delta(\vec{r})\ ,$$

其解为

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{e_m}{r^2}\vec{e}_r\ 。$$

但是，这个磁场不能由势 $\vec{A}(\vec{r})$ 通过 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ 产生，因为 $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$，即 $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\neq 0$ 与 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ 是矛盾的。

上述矛盾也体现在破坏高斯定理。在围绕磁荷的封闭面上，应该有

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = 4\pi e_m\,,$$

但如果有 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$，则

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{S} = \int \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot dV = 0\,,$$

破坏高斯定理。不可能存在一个矢势 $\vec{A}(\vec{r})$，使得磁场 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ 有源（磁单极）。现在要讨论的是，假如有磁单极，会有什么后果？

Dirac 弦

如果在球坐标系中设

$$\vec{A} = e_m\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi \qquad \theta<\pi-\varepsilon\ （\varepsilon 是无限小量）$$

产生的磁场

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A}\\ &= \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\varphi\sin\theta\right)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right)\vec{e}_\theta+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi\\ &= \frac{e_m}{r^2}\vec{e}_r\end{aligned}$$

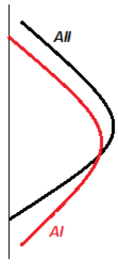
似乎是有源的。但在 $\theta=\pi$ 时，$\vec{A}$ 发散。即在负 Z 轴上存在一条奇异弦，称为 Dirac 弦。我们仍然没有找到在全空间满足要求的矢势 $\vec{A}$。

电荷量子化

不能在全空间有满足 $\vec{B}(\vec{r})=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\dfrac{e_m}{r^2}\vec{e}_r$ 的 $\vec{A}$。如果取

$$\vec{A}_I = e_m\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi, \qquad \theta<\pi\text{-}\varepsilon$$

$$\vec{A}_{II} = -e_m\frac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi, \qquad \theta>\varepsilon$$



$\vec{A}_I$ 在 $\theta=\pi$ 处发散，$\vec{A}_{II}$ 在 $\theta=0$ 处发散。对于这样的 $\vec{A}$，在两个势的重叠区域有

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{e_m}{r^2}\vec{e}_r\text{。}$$

两个势导致相同的磁场 $\vec{B}$，它们之间必能通过一个规范变换 Λ 连接起来，

$$\vec{A}_{II}-\vec{A}_I=-2e_m\frac{1}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi=\vec{\nabla}\Lambda\text{。}$$

在球坐标系中，

$$\vec{\nabla}\Lambda=\frac{\partial\Lambda}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

有

$$\Lambda(\vec{r})=-2e_m\varphi\text{。}$$

考虑一个带电荷 e 的粒子在上述势场 $\vec{A}_I,\vec{A}_{II}$ 中运动，波函数 ψ_I,ψ_{II} 在在两个势的重叠区域有关系

$$\psi_{II}=e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\psi_I=e^{-\frac{2iee_m\varphi}{\hbar c}\Lambda}\psi_I\text{。}$$

由于波函数的单值性，ψ_{II} 在重叠区域必须满足单值条件。例如在 $\theta=\pi/2$，

$$\psi_{II}(r,\theta=\pi/2,\varphi=0)=\psi_{II}(r,\theta=\pi/2,\varphi=2\pi),$$

即

$$\frac{2ee_m}{\hbar c}=\pm n,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots,$$

即电荷量子化

$$e=\pm\frac{\hbar c}{2e_m}n,$$

存在最小电荷单元$\dfrac{\hbar c}{2e_m}$。

注意：量子力学并不要求（导致）磁单极，刚才也没找到统一的矢势$\vec{A}(\vec{r})$，使得磁场$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$有源。但是如果有磁单极，则必有电荷量子化，存在最小电荷单元。