《高等量子力学》第 24 讲

第八章 相对论量子力学

非相对论量子力学的困难：1)无相对论协变性（动量能量不对称，空间时间不对称）；2)理论上不能自洽引入自旋；3)几率守恒，无粒子的产生与湮灭。

相对论量子力学的建立：不是一个简单地把

$$E=\frac{\vec{p}^2}{2m}\rightarrow E^2=\vec{p}^2c^2+m^2c^4$$

的推广，在发展的过程中先是建立了 Dirac 方程，最后建立了处理相对论多粒子体系的理论—量子场论。

相对论量子力学的应用：一方面是研究一些量子系统(例如凝聚态物理，原子精细结构，核物理，重夸克物理)的重要工具，另一方面是量子场论的基础。

1. 相对论运动方程

1)自然单位制

物理学中一共有三个独立的量纲，一般选取长度量纲【L】，时间量纲【T】，和能量量纲【E】。在相对论量子力学，特别是由此发展的量子场论，由于高速和微观的特点，取光速 c 为速度的单位，取 $\hbar$ 为作用量的单位，则只剩下一个独立单位，一般取为能量量纲【E】。自然单位制：取 $\hbar=c=1$，$\hbar$，c 便不在计算中明显出现了，所有物理量的量纲都是【E】的函数。例如速度为 0.6，能量为 200 GeV，长度为 10 GeV $^{-1}$，时间 5 GeV $^{-1}$，等等。

2)Klein-Gordon 方程及其困难

考虑自由粒子的波动方程。直接的想法是将非相对论能量

$$E=\frac{\vec{p}^2}{2m}\ \rightarrow\ E^2=\vec{p}^2+m^2,\quad E^2-\vec{p}^2=m^2,$$

说明 $E^2-\vec{p}^2$ 是一个 Lorentz 标量。

引入 Minkowski 空间的度规张量

$$g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=diag\left(1,-1,-1,-1\right),$$

和相对论 4 维动量（坐标）

$$p=\left(E,\vec{p}\right),\qquad x=\left(t,\vec{x}\right),$$

则

$$E^2-\vec{p}^2=p^\mu g_{\mu\nu}p^\nu=p^2$$
$$t^2-\vec{x}^2=x^\mu g_{\mu\nu}x^\nu=x^2$$

考虑具有 Lorentz 协变的量子化方案

$$\hat{E}=i\partial_t,\ \ \hat{\vec{p}}=-i\vec{\nabla},$$

即

$$\hat{p}=(\hat{E},\hat{\vec{p}})=i(\partial_t,-\vec{\nabla})=i\partial,$$

得到 $p^2-m^2=0$ 对应的自由粒子 Klein-Gordon 方程

$$\left(\hat{p}^2-m^2\right)\psi=0,$$
$$\left(\partial^\mu\partial_\mu+m^2\right)\psi=0\text{。}$$

用 ψ^* 左乘 Klein-Gordon 方程，$\psi^*\left(\partial^\mu\partial_\mu+m^2\right)\psi=0$，再用 ψ 右乘 Klein-Gordon 方程的复共轭，$\left[\left(\partial^\mu\partial_\mu+m^2\right)\psi^*\right]\psi=0$，然后两式相减，有流守恒方程（连续性方程）

$$\partial^\mu j_\mu=0,\qquad j=\left(\rho,\vec{j}\right)=\psi*\left(\partial_\mu\psi\right)-\left(\partial_\mu\psi*\right)\psi$$

或

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

$$\rho = j_0 = \frac{i}{2m}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi\right), \qquad \vec{j} = \frac{1}{2im}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)。$$

因为 Klein－Gordon 方程是一个时间的二阶微分方程，ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ 都是独立的初始条件，导致上式中的几率密度 ρ 有可能为负。这就是 Klein-Gordon 方程的几率不正定困难。注意，Schroedinger 方程是时间的一阶微分方程，几率密度 $\rho = \psi^+\psi$ 正定。

另外，Klein－Gordon 方程的平面波解 $\psi = e^{-ip^\mu x_\mu} = e^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}$ 满足 $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$，即 $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ 和 $E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ 的平面波都是 Klein-Gordon 方程的解。此即 Klein-Gordon 方程的负能困难。在经典力学中，只要粒子初始时处在正能态，由于没有跃迁，故无负能困难。量子力学中的跃迁则导致负能困难。注意，Schroedinger 方程（$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$）无负能困难。

3)Dirac 方程

为了解决由时间二次微分引起的负几率困难，只能有时间的一次微分，又由于相对论协变性，空间也只能有一次微分。考虑到 $\hat{H}$ 只是粒子动量 $\hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$ 和质量 m 的函数，设

$$i\partial_t \psi = \hat{H}\psi, \qquad \hat{H} = \vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + \beta m。$$

为了满足 $\hat{H}^2 = \hat{\vec{p}}^2 + m^2$，即 $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ 的相对论关系，标量 β 和矢量 $\vec{\alpha}$ 必为矩阵，而不是常数，波函数 ψ 也是一列矩阵。将坐标空间的动量算符 $\hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$ 代入运动方程

$$\left(i\partial_t + i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \beta m\right)\psi = 0,$$

并左乘矩阵β，

$$\left(i\beta\partial_t + i\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - \beta^2 m\right)\psi = 0$$

设

$$\gamma = \left(\gamma_0, \vec{\gamma}\right) = \left(\beta, \beta\vec{\alpha}\right)$$

若令$\gamma_0^2 = 1$，有运动方程（Dirac 方程）

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0。$$

γ矩阵的性质：

1）用算符$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + m\right)$作用 Dirac 方程，

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + m\right)\left(i\gamma^\nu\partial_\nu - m\right)\psi = 0$$

$$\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\psi = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\right)\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\psi = 0$$

只有γ矩阵的分量之间满足对易关系

$$\left\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\right\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

才有

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)\psi = 0,$$

即 Dirac 旋量ψ的每个分量均满足 Klein-Gordon 方程（但总个旋量波函数满足 Dirac 方程，有交叉项），保证了满足$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$的平面波解$\psi = e^{-ip^\mu x_\mu}$是 Dirac 方程的解。但这也说明正负能平面波解都是 Dirac 方程的解，表明 Dirac 方程仍然有负能困难。

注意：$\left\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\right\} = 2g_{\mu\nu}$保证了之前$\gamma_0^2 = 1$的假设。

2）为了保证哈密顿量是厄米算符，

$$\hat{H}=\gamma_0\vec{\gamma}\cdot\hat{\vec{p}}+\gamma_0 m,\qquad \hat{H}^+=\vec{\gamma}^+\gamma_0^+\cdot\hat{\vec{p}}+\gamma_0^+ m$$

只有当$\gamma_0^+=\gamma_0=\gamma_0\gamma_0\gamma_0$，　$\vec{\gamma}^+=\gamma_0\vec{\gamma}\gamma_0$，即

$$\gamma_\mu^+=\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0$$

才能保证

$$\hat{H}^+=\vec{\gamma}^+\gamma_0^+\cdot\hat{\vec{p}}+\gamma_0^+ m=\hat{H}\ 。$$

由此可知，$\gamma=(\gamma_0,\ \vec{\gamma})$是一个 Lorentz 空间的矢量，每一个分量是 Dirac 空间的矩阵。由性质$\gamma_\mu^+=\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0$和$\{\gamma_\mu,\ \gamma_\nu\}=2g_{\mu\nu}$还可以证明

$$\gamma^\mu\gamma_\mu=\gamma^\mu g_{\mu\nu}\gamma^\nu=\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu+g_{\nu\mu}\gamma^\nu\gamma^\mu\right)=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu\right)=g^{\nu\mu}g_{\mu\nu}=4,$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu=-2\gamma^\nu,$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu=4g^{\nu\rho},$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu=-2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu$$

等等关系式。满足以上性质的γ矩阵可取为 4X4 的矩阵

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{pmatrix},\qquad \vec{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ -\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}。$$

注意，Dirac 方程中的波函数ψ不再是一个标量，而是一个 4 维矢量，

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix},$$

称为 Dirac 旋量。

Dirac 方程没有几率不正定的困难。将 Dirac 方程$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\right)\psi=0$两边取厄米共轭

$$\psi^+\left(i\gamma^{\mu+}\overleftarrow{\partial}_\mu+m\right)=0\,,$$

定义$\bar{\psi}=\psi^{+}\gamma_0$，有

$$\bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}\gamma_0+m\gamma_0\right)=0$$

右乘γ_0，有

$$\bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}+m\right)=0\text{。}$$

将这个方程右乘ψ，$\bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}+m\right)\psi=0$，与 Dirac 方程左乘$\bar{\psi}$，$\bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi=0$相加，有流守恒方程

$$\partial_{\mu}j^{\mu}=0,\qquad j^{\mu}=\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\text{。}$$

或

$$\begin{aligned}&\partial_t\rho+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0\\&\rho=j_0=\bar{\psi}\gamma_0\psi=\psi^{+}\psi\geq 0,\quad\text{正定}\\&\vec{j}=\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi\end{aligned}$$

4)中微子的二分量理论

取中微子质量$m=0$，

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi=0,\qquad i\partial_t\psi+i\vec{\theta}\cdot\vec{\nabla}\psi=0,\qquad\vec{\theta}=\gamma_0\vec{\gamma}$$

只有 3 个独立的矩阵$\vec{\theta}$。

用$-i\partial_t+i\vec{\theta}\cdot\vec{\nabla}$作用于方程，有

$$\begin{aligned}&\left(\partial_t^2-\partial_i\partial_j\theta_i\theta_j\right)\psi=0\\&\left(\partial_t^2-\frac{1}{2}\left(\theta_i\theta_j+\theta_j\theta_i\right)\partial_i\partial_j\right)\psi=0\end{aligned}$$

与 KG 方程

$$\left(\partial_t^2-\vec{\nabla}^2\right)\psi=0$$

相比，有

$$\theta_i\theta_j+\theta_j\theta_i=2\delta_{ij}$$

说明：$\vec{\theta}$ 可以取为 Pauli 矩阵 $\vec{\sigma}$，ψ 退化为二分量的波函数，满足

$$i\partial_t \psi = -i\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\psi = \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\psi \text{ 。}$$

中微子的守恒量：$\hat{H} = \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}$

1）$\left[\hat{\vec{p}},\, \hat{H}\right] = \left[\hat{\vec{p}},\, \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\right] = 0$，有动量守恒。

2）$\left[\vec{\sigma},\, \hat{H}\right] = -2i\vec{\sigma}\times\hat{\vec{p}}$，　$\left[\vec{L},\, \hat{H}\right] = i\vec{\sigma}\times\hat{\vec{p}}$，　$\left[\vec{J} = \vec{L} + \dfrac{\vec{\sigma}}{2},\, \hat{H}\right] = 0$，有自旋角动量不守恒，轨道角动量不守恒，但总角动量守恒。

3）$\left[\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}},\, \hat{H}\right] = 0$，　$\left[\vec{\sigma}\cdot\dfrac{\hat{\vec{p}}}{\left|\hat{\vec{p}}\right|},\, \hat{H}\right] = 0$，有自旋在动量方向的投影 $\vec{\sigma}\cdot\dfrac{\hat{\vec{p}}}{\left|\hat{\vec{p}}\right|}$ 守恒。由于 $\left(\vec{\sigma}\cdot\dfrac{\hat{\vec{p}}}{\left|\hat{\vec{p}}\right|}\right)^2 = 1$，$\vec{\sigma}\cdot\dfrac{\hat{\vec{p}}}{\left|\hat{\vec{p}}\right|}$ 的本征值为 ± 1，称为右旋和左旋中微子态。

4）$\left[\hat{P},\, \hat{H}\right] \neq 0$，宇称不守恒。