《高等量子力学》第 26 讲

3. 电磁相互作用

如何将自由 Dirac 方程$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi=0$包含电磁相互作用。

1)局域规范不变性

由最小耦合引入电磁相互作用。将 Dirac 方程中的

$$\text{偏微分}\ \partial_{\mu}\rightarrow\text{协变微分}\ D_{\mu}=\partial_{\mu}+ieA_{\mu}$$

其中 4 维电磁势$A_{\mu}=(A_0,\vec{A})$是外场，与电磁场的关系是$\vec{E}=-\nabla A_0-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$，$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$。电磁场中的 Dirac 方程

$$\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right)\psi=0,$$

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-e\gamma^{\mu}A_{\mu}-m\right)\psi=0$$

如果要求 Dirac 方程在局域变换

$$\psi(x)\rightarrow e^{ie\alpha(x)}\psi(x)$$

时保持不变，则电磁场的变化为

$$A_{\mu}(x)\rightarrow A_{\mu}(x)-\partial_{\mu}\alpha(x)$$

以上变换称为**局域规范变换，Dirac 方程的对称性称为局域规范对称。**

2)电荷共轭变换（C 变换）

将电磁场中的 Dirac 方程取厄米共轭，

$$\psi^{+}\left(-i\gamma_{\mu}^{+}\overleftarrow{\partial}^{\mu}-e\gamma_{\mu}^{+}A^{\mu}-m\right)=0$$

右乘γ_0，并利用$\gamma_{\mu}=\gamma_0\gamma_{\mu}^{+}\gamma_0$，$\gamma_0\gamma_0=1$和$\bar{\psi}=\psi^{+}\gamma_0$，有

$$\bar{\psi}\left(i\gamma_{\mu}\overleftarrow{\partial}^{\mu}+e\gamma_{\mu}A^{\mu}+m\right)=0$$

转置

$$\left(i\gamma_\mu^T\partial^\mu + e\gamma_\mu^T A^\mu + m\right)\overline{\psi}^T = 0\,,$$

在 Dirac 空间进行变换 C，

$$\left(iC\gamma_\mu^T C^{-1}\partial^\mu + eC\gamma_\mu^T C^{-1}A^\mu + m\right)C\overline{\psi}^T = 0\,。$$

如果变换 C 满足关系

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu\,,$$

并令

$$\psi^c = C\overline{\psi}^T$$

则有

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi^c = 0\,。$$

与原 Dirac 方程

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi = 0$$

相比，$\psi^c = C\overline{\psi}^T$ 表示电荷为 $-e$ 的粒子的波函数。变换 C 称为**电荷共轭变换。**

3)非相对论极限与电子磁矩

电子（$-e$）满足运动方程

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi(x) = 0\,,$$

定态波函数 $\psi\left(x\right) = \psi\left(\vec{x}\right)e^{-iEt}$ 满足

$$\left(\gamma_0\vec{\gamma}\cdot\left(\hat{\vec{p}} + e\vec{A}\right) - eA_0 + m\gamma_0\right)\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$$

或者

$$\left(\vec{\alpha}\cdot\left(\hat{\vec{p}} + e\vec{A}\right) - eA_0 + m\beta\right)\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})\,。$$

γ_μ 或者 $\beta, \vec{\alpha}$ 的性质由它们的代数关系即对易关系完全确定。只有需要了解波函数分量的信息时需要它们的矩阵表示，而矩阵表示并不唯一。前面提到

的是手征表示$\beta=\gamma_0=\begin{pmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}=\gamma_0\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & -\vec{\sigma}\end{pmatrix}$，而在过渡到非相对论时常用的是 Pauli-Dirac 表示$\beta=\gamma_0=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}=\gamma_0\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}$。

令 $E=E'+m$ (E' 和 m 为动能和静能，便于过渡到非相对论) 和 $\psi(\vec{x})=\begin{pmatrix}\varphi(\vec{x})\\ \chi(\vec{x})\end{pmatrix}$（便于与非相对论的自旋波函数比较），在 Pauli-Dirac 表示有

$$\vec{\sigma}\cdot\left(\hat{\vec{p}}+e\vec{A}\right)\chi-eA_0\varphi=E'\varphi,$$
$$\vec{\sigma}\cdot\left(\hat{\vec{p}}+e\vec{A}\right)\varphi-eA_0\chi-2m\chi=E'\chi$$

在非相对论极限$2m\gg\left|E'+eA_0\right|$，第二个方程变为

$$\chi=\frac{\vec{\sigma}\cdot\left(\hat{\vec{p}}+e\vec{A}\right)}{2m+E'+eA_0}\varphi\simeq\frac{\vec{\sigma}\cdot\left(\hat{\vec{p}}+e\vec{A}\right)}{2m}\varphi。$$

可以看出，二分量中的φ是主要分量，χ是小分量。将χ代入φ的方程，有

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma}\cdot\left(\hat{\vec{p}}+e\vec{A}\right)\right)^2-eA_0\right]\varphi=E'\varphi。$$

化简并利用$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$，得到电磁场中电子 Dirac 方程的非相对论极限，

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}}+e\vec{A}\right)^2-\vec{\mu}\cdot\vec{B}-eA_0\right]\varphi=E'\varphi,$$

其中$\vec{\mu}=-\frac{e}{2m}\vec{\sigma}$是电子内禀磁矩，是 Dirac 方程的重要结论。

4)中心场中的非相对论极限

例如取$\vec{A}=0$，$V(r)=-eA_0(r)$，定态 Dirac 方程的两分量形式为

$$\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\chi=(E'-V)\varphi,$$
$$\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\varphi=(2m+E'-V)\chi$$

在非相对论极限$2m \gg \left|E'-V\right|$，保持到一级近似，

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}}{2m+\left(E'-V\right)}\varphi \simeq \frac{1}{2m}\left(1-\frac{E'-V}{2m}\right)\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\varphi ,$$

大分量φ满足方程

$$\frac{1}{2m}\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\left(1-\frac{E'-V}{2m}\right)\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\varphi = (E'-V)\varphi 。$$

化简后，

$$\left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}+V+\frac{\hat{\vec{p}}^2}{4m^2}(V-E')+\frac{1}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{L}}+\frac{1}{4m^2}\left(\vec{\nabla}^2V+\frac{dV}{dr}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]\varphi = E'\varphi$$

只保留到一级近似，故利用非相对论零级近似

$$(E'-V)\varphi \simeq \frac{\left(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\right)^2}{2m}\varphi = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}\varphi$$

有

$$\left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}+V-\frac{\hat{\vec{p}}^4}{8m^3}+\frac{1}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{L}}+\frac{1}{4m^2}\left(\vec{\nabla}^2V+\frac{dV}{dr}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]\varphi = E'\varphi ,$$

左边第三项$-\frac{\hat{\vec{p}}^4}{8m^3}$是动能相对论修正

$$\sqrt{m^2+\vec{p}^2}-m = m\sqrt{1+\frac{\vec{p}^2}{m^2}}-m$$
$$= m\left(1+\frac{1}{2}\frac{\vec{p}^2}{m^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{\vec{p}^2}{m^2}\right)^2+......\right)-m \simeq \frac{\vec{p}^2}{2m}-\frac{\vec{p}^4}{8m^3}$$

第四项$\frac{1}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{L}}$是自旋−轨道耦合。第五项的意义？

问题：大分量φ是否等价于原来的二分量波函数ψ？考虑波函数的归一化

$$\langle\psi|\psi\rangle=\langle\varphi|\varphi\rangle+\langle\chi|\chi\rangle,$$

$$\langle\chi|\chi\rangle\simeq\left\langle\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}}{2m}\varphi\middle|\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}}{2m}\varphi\right\rangle=\frac{\hat{\vec{p}}^2}{4m^2}\langle\varphi|\varphi\rangle,$$

$$\langle\psi|\psi\rangle\simeq\left(1+\frac{\hat{\vec{p}}^2}{4m^2}\right)\langle\varphi|\varphi\rangle\simeq\left\langle\left(1+\frac{\hat{\vec{p}}^2}{8m^2}\right)\varphi\middle|\left(1+\frac{\hat{\vec{p}}^2}{8m^2}\right)\varphi\right\rangle$$

故考虑到归一化后，应该取$\psi=\left(1+\frac{\hat{\vec{p}}^2}{8m^2}\right)\varphi$来取代$\varphi$。将$\psi$代入$\varphi$的方程，化简后得到$\psi$满足的方程

$$\left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}+V-\frac{\hat{\vec{p}}^4}{8m^3}+\frac{1}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{L}}+\frac{1}{8m^2}\vec{\nabla}^2V\right]\psi=E'\psi\ ,$$

最后一项是相对论修正的 Darwin 项。

4. 自由 Dirac 方程的平面波解

自由粒子的 Dirac 方程

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\right)\psi(x)=0\text{。}$$

由每一个分量均满足 Klein－Gordon 方程，Dirac 方程也有正负能平面波解，

$$\psi_+(x)=u(p)e^{-ip^\mu x_\mu},$$

$$\psi_-(x)=v(p)e^{ip^\mu x_\mu},$$

其中 $p_0=E=\sqrt{m^2+\vec{p}^2}$，Dirac 结构包含在旋量$u(p)$与$v(p)$中。代入方程，

$$\left(\gamma^\mu p_\mu-m\right)u(p)=0,$$

$$\left(\gamma^\mu p_\mu+m\right)v(p)=0.$$

先考虑在粒子静止系，即 $p=(m,\vec{0})$ 的解，

$$\left(\gamma_0-1\right)u(m,\vec{0})=0,$$
$$\left(\gamma_0+1\right)v(m,\vec{0})=0,$$

在 Pauli-Dirac 表象，$u(m,\vec{0}),v(m,\vec{0})$分别有两个独立的解

$$u_{\uparrow}(m,\vec{0})=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad u_{\downarrow}(m,\vec{0})=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad v_{\uparrow}(m,\vec{0})=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad v_{\downarrow}(m,\vec{0})=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}。$$

设从粒子静止系到运动系的 Lorentz 变换为

$$u_\alpha(p)=Uu_\alpha(m,\vec{0}),$$
$$v_\alpha(p)=Vv_\alpha(m,\vec{0}),\qquad \alpha=\uparrow,\downarrow\ ,$$

代入$u(p),v(p)$满足的方程

$$\left(\gamma^\mu p_\mu-m\right)Uu_\alpha(m,\vec{0})=0,$$
$$\left(\gamma^\mu p_\mu+m\right)Vv_\alpha(m,\vec{0})=0,$$

注意到

$$\left(\gamma^\mu p_\mu-m\right)\left(\gamma^\nu p_\nu+m\right)=\left(\gamma^\mu p_\mu+m\right)\left(\gamma^\nu p_\nu-m\right)=p^2-m^2=0,$$

有

$$U=A\left(\gamma^\mu p_\mu+m\right),$$
$$V=B\left(\gamma^\mu p_\mu-m\right),$$

其中A,B为常数，即

$$u_\alpha(p)=A\left(\gamma^\mu p_\mu+m\right)u_\alpha(m,\vec{0}),$$
$$v_\alpha(p)=B\left(\gamma^\mu p_\mu-m\right)v_\alpha(m,\vec{0})。$$

定义

$$\bar{u}_\alpha(p) = u_\alpha^+(p)\gamma_0 = A\bar{u}_\alpha(m,\vec{0})\left(\gamma^\mu p_\mu + m\right),$$
$$\bar{v}_\alpha(p) = v_\alpha^+(p)\gamma_0 = B\bar{v}_\alpha(m,\vec{0})\left(\gamma^\mu p_\mu - m\right),$$

要求有下面的正交归一化

$$\bar{u}_\alpha(p)u_\beta(p) = \delta_{\alpha\beta},$$
$$\bar{v}_\alpha(p)v_\beta(p) = -\delta_{\alpha\beta},$$
$$\bar{u}_\alpha(p)v_\beta(p) = 0,$$
$$\bar{v}_\alpha(p)u_\beta(p) = 0,$$

有

$$A = -B = \frac{1}{\sqrt{2m\left(m+E\right)}}\text{。}$$