高等量子力学考点总结

by 张楚珩（sealzhang.tk）

说明：内容全部为讲义上面内容的整理，**加黑**的内容为很容易出成考题的知识点。

第一章 基本概念

- S-G实验：已知S_z推算S_y、S_z
- **推导不确定关系**
- 平移算符和生成算符之间的关系（eg. 证明$\hat{T}(\overrightarrow{dx}) = 1 - i\frac{\hat{p}}{\hbar}\overrightarrow{dx}$）
- 动量和坐标表象转换关系
- $\hat{x}$和$\hat{p}$的对易关系
- **最小不确定态满足的条件和动量-位置最小不确定态的形式**
- 能量和时间的不确定关系

第二章 量子动力学

- 推导薛定谔方程
- Dyson级数（从时间演化算符满足的微分方程出发）
- 电子自旋进动
- **Ehrenfest定律证明/包含电磁相互作用时的Ehrenfest定律的证明**
- 一维线性谐振子的全部推导（$\hat{H}$写成升降算符的形式、$n > 0$、n为整数、基态、升降算符作用于本征态）
- Casimir效应（$E = 2 \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\hbar\omega_k$）
- **谐振子的相干态**
- 从薛定谔方程到坐标表象的薛定谔方程和定态薛定谔方程
- WKB近似（假设：$\varphi(x,t) = e^{\frac{i}{\hbar}(s(x)-Et)}$，$s(x) = s_0(x) + (\frac{i}{\hbar})s_1(x) + \cdots$）
- 传播子及其满足的动力学方程 $K(x,t;x_0,t_0) = \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|x_0\rangle$
- Feynman路径积分的推导（$K = \int_{x_1}^{x_N} dx(t)\exp(\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} L_c dt)$）
- **用定义和Feynman路径积分计算自由粒子/谐振子的传播子**
- **常数势导致量子相干（$V \to V + \Delta V$）**
- **电磁场中的常数势导致量子相干（$A \to A + \nabla\Lambda$）**
- **AB效应（磁通量子化、干涉现象）**
- Dirac弦（电荷量子化方案）

第三章 角动量理论

- **量子转动下各角动量平均值的变化（eg.** $\langle J_x\rangle \rightarrow \langle e^{\frac{i}{\hbar}J_z\varphi}J_x e^{-\frac{i}{\hbar}J_z\varphi}\rangle$**）**
- 泡利矩阵的代数性质
- 由$S_{z\uparrow}$转动生成任意自旋态
- Euler转动（在下面一条的计算中用到）
- $R_n(\varphi)$**在**$|j,m\rangle$**表象下的矩阵表示（**$R_n(\varphi)=\exp(-i\frac{\varphi}{2}\sigma_n)$**）**
- **自旋轨道角动量耦合**
- 两电子角动量耦合
- 量子力学条件下定域性原理的冲突
- **自旋**$\frac{1}{2}$**粒子的密度矩阵表示**
- 密度矩阵随时间的演化

第四章 近似方法

- 定态微扰的公式推导
- **带电粒子在谐振子势+电场中的运动（定态微扰论的应用）**
- Stark效应（定态微扰论的应用）（分裂为三个能级$\Delta E=3e\epsilon a$）
- **氢原子的相对论修正（定态微扰论的应用）**
- 氢原子的自旋轨道耦合
- 变分法求解氦原子的基态波函数（变分法的应用）
- 强耦合方法求解汤川势（$V(r)=g^2\frac{\exp(-\alpha r)}{r}$，$\phi(r)=\exp(-S(r))$）
- 含时微扰的推导/费米黄金规则的推导
- **基态氢原子的跃迁（含时微扰的应用）**
- 相互作用绘景中算符和态的演化规则
- 相互作用绘景中演化算符的展开

第五章 散射理论

- 散射微分截面与散射振幅（$dN=J_n\sigma(\theta,\varphi)d\Omega$，$\psi=e^{ikz}+f(\theta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$，$\sigma(\theta,\varphi)=|f(\theta,\varphi)|^2$）
- Green函数方法求解、与渐进解比较得出散射振幅
- Born级数
- Lippmann-Schwinger方程（Green方法的算符表达形式）
- Dyson方程
- 光学定理（$\mathrm{Im}\,f(0,\varphi)=\frac{k}{4\pi}\sigma_{tot}$）
- **分波法（**$f(\theta)=\frac{1}{k}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l$**）**

第六章 对称性与全同粒子

- **全同性原理的观察效应：两自由粒子出现在距离r附近的概率（非全同离子、全同波色子、全同费米子）**
- 全同性质对氦原子中电子的限制
- **零温下费米子的压强**

第七章 二次量子化

- Fock表象下产生湮灭算符的对易关系的推导
- 证明$\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$
- 求$\hat{a}_i|\cdots, n_i, \cdots\rangle$，$\hat{a}_i^\dagger|\cdots, n_i, \cdots\rangle$
- **可加单粒子算符和可加双粒子算符的表示**
- 单粒子连续谱中的产生湮灭算符（波函数的量子化）
- 量子化波函数自洽（从海森堡绘景和薛定谔绘景中来看$\hat{\psi}_\sigma(\vec{r})$，$\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{r})$）
- **无相互作用费米子的密度平均值、密度矩阵、密度-密度关联函数**
- 无相互作用波色子的密度-密度关联函数
- **有相互作用费米子体系的平均场方法/Particle-hole Excitation Energy**

第八章 相对论量子力学

- **KG方程的推导和流守恒方程**
- **Dirac方程的推导和流守恒方程**
- **Dirac方程的中微子（$m = 0$）情形**
- 一般Lorentz不变性/连续Lorentz变换/空间反演变换/时间反演变换
- 电磁相互作用/电荷共轭变换
- **自由粒子的Dirac方程平面波解**

常用公式

- $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- $\exp(\lambda\hat{A})\hat{B}\exp(-\lambda\hat{A}) = \hat{B} + \lambda[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\lambda^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \cdots$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k' + k} e^{ik'r}dk' = 2\pi i \operatorname{Res} f(-k) = 2\pi i e^{-ikr}$
- $\int_0^\pi \cos^2(kr\cos\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}(1 + \frac{\sin(2kr)}{2kr})$

考前记公式

不确定关系

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq |\frac{1}{2i}\langle[A,B]\rangle|^2$$

坐标动量表象转换

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx}$$

传播子

$$K(x,t;x_0,t_0) = \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|x_0\rangle$$

转动算符

$$R_n(\varphi) = \exp(-i\tfrac{\varphi}{2}\sigma_n) = \cos(\frac{\varphi}{2}) - i\sigma_n\sin(\frac{\varphi}{2})$$

升降算符

$$J_\pm|j,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|j,m\pm 1\rangle$$

定态微扰论

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} = E_n^{(0)} + \langle n|H^{(1)}|n\rangle + \sum\nolimits_m' \frac{|\langle m|H^{(1)}|n\rangle|^2}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}}$$

$$|n\rangle = |n\rangle^{(0)} + |n\rangle^{(1)} = |n\rangle^{(0)} + \sum\nolimits_m' \frac{\langle m|H^{(1)}|n\rangle}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}}|m\rangle^{(0)}$$

含时微扰论

$$a_m(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} H'_{mn}e^{-i(\omega_m-\omega_n)t}dt$$

$$\lim\nolimits_{t\to\infty} W_m(t) = \frac{2\pi t}{\hbar}|F_{mn}|^2\delta(E_k - E_n \pm \omega)$$

光学定理

$$\operatorname{Im} f(0,\varphi) = \frac{k}{4\pi}\sigma_{tot}$$

分波法

$$f(\theta) = \frac{1}{k}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l$$

Klein-Gordon方程

$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0$

Dirac方程

$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$

Dirac表象 $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$